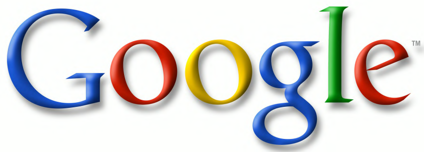
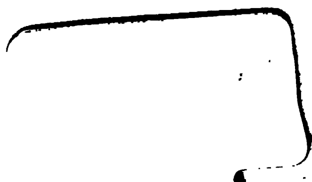








GUSTAV ZEUNER.

GRUNDZÜGE

DER

MECHANISCHEN WÄRMETHEORIE.

GRUNDZÜGE

DER MECHANISCHEN

WÄRMETHEORIE.

MIT BESONDERER RÜCKSICHT

AUF DAS

VERHALTEN DES WASSERDAMPFES

VON

DR. GUSTAV ZEUNER,

Professor der Mechanik und theoretischen Maschinenlehre am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich.

MIT ZEHN IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

FREIBERG.

BUCHHANDLUNG J. G. ENGELHARDT.

(BERNHARD THIERBACH.)

1860.


BIBLIOTHECA·BODLEIANA·
DOMINUS ILLUMINATIO MEA

VORREDE.

Eine Reihe der wichtigsten Resultate der Arbeiten von *Clapeyron*, *Clausius*, *Rankine*, *James* und *William Thomson*, *Reech* und Anderen über die Wärme haben durch die Versuche von *Joule*. *W. Thomson* und *Hirn* in so überraschender Weise ihre Bestätigung gefunden, dass an der Richtigkeit der diesen Arbeiten zu Grunde liegenden Ansichten über das Wesen der Wärme nicht mehr gezweifelt werden kann.

Es ist daher erklärlich, dass in der neuesten Zeit die Physiker und Mechaniker mit grösserem Interesse die Arbeiten aus dem Gebiete der mechanischen Wärmetheorie verfolgen und dass Viele sich lebhaft mit der weiteren Ausbildung derselben beschäftigen.

Das erste Studium der mechanischen Wärmetheorie ist jedoch insofern mit Schwierigkeiten verknüpft, als die meisten und wichtigsten hierher gehörenden Arbeiten in deutschen, englischen und französischen wissenschaftlichen Zeitschriften zerstreut sind. Es schien mir daher zeitgemäss, die mechanische Wärmetheorie in einer besonderen Schrift zu bearbeiten und alle von verschiedenen Schriftstellern bis zum heutigen Tage gegebenen Rechnungs- und Versuchsresultate vollständig und im Zusammenhange darzulegen und sonach durch vorliegende Abhandlung ein Hülfsmittel zu bieten, sich leicht und ohne Mühe mit dem jetzigen Stande der Ausbildung der mechanischen Wärmetheorie bekannt zu machen.

Neben dem angegebenen Zwecke leitete mich aber bei der Bearbeitung vorliegender Schrift noch der Wunsch, speciell die Aufmerksamkeit meiner Fachgenossen, der Mechaniker, auf die Hauptresultate der mechanischen Wärmetheorie zu lenken. Zu diesem Zwecke habe ich die „Lehre von den Dämpfen" nicht nur weit ausführlicher behandelt, als dies bisher von Anderen geschah, sondern habe auch den hierauf bezüglichen Theil der Wärmelehre in neuer und, wie es mir scheint, in einer das

Studium erleichternden Weise dargestellt. Von welcher Wichtigkeit gerade für den Mechaniker das Studium dieses Theiles ist, geht aus dem Umstande hervor, dass nach der neuen Wärmelehre die Grundlage unserer jetzigen Dampfmaschinentheorie, die *Pambour*'sche Hypothese, unrichtig ist; dass, wie in den schönen Arbeiten von *Clausius* und *Rankine* zuerst theoretisch und durch die Versuche von *Hirn* experimentell nachgewiesen wurde, das Verhalten des Dampfes in unseren Dampfmaschinen wesentlich verschieden ist, von dem, wie wir es bis jetzt in unseren Rechnungen annahmen, und endlich, dass die heutige Dampfmaschine hinsichtlich der Benutzung der Betriebskraft, der Wärme, als die unvollkommenste aller Umtriebsmaschinen erscheint.

Solche und ähnliche Resultate müssen allseitig zu weiteren Forschungen anregen, und wenn dazu auch die vorliegende Arbeit etwas beizutragen vermag, so ist der Wunsch, mit dem ich sie der Oeffentlichkeit übergebe, erfüllt.

ZÜRICH, im September 1859.

Gustav Zeuner.

INHALTS-VERZEICHNISS.

Capitel I.

Allgemeine Betrachtungen und Ableitung der beiden Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie.

§ 1.

Nach der mechanischen Wärmetheorie betrachtet man die Wärme nicht als Stoff, sondern als eine Bewegungsform. Man stellt sich vor, dass im Innern desjenigen Körpers, der uns warm erscheint, Bewegungen stattfinden und die Aeusserungen derselben auf unser Gefühl sind es eben, was wir gewöhnlich Wärme nennen. Was nach dieser Ansicht aber in Bewegung ist, und wie diese Bewegung selbst beschaffen ist, darüber existiren zwei verschiedene Meinungen, die in neuerer Zeit von *Redtenbacher* und *Clausius* zuerst in präciser Weise dargelegt wurden. Beide Ansichten führen aber zu denselben und zwar zu den im Folgenden näher darzulegenden Resultaten; ja es ist nicht einmal nothwendig, sich nach dieser Richtung hin einer bestimmten Ansicht unbedingt anzuschliessen, da die folgende mathematische Behandlung nicht unbedingt die Kenntniss der Hypothesen erfordert, die über die Wärmebewegung überhaupt aufgestellt wurden, und ihr allein die allgemeine Annahme genügt, dass die Wärme eine Bewegungsform ist.

Obgleich ich daher sofort zur speciellen Behandlung übergehen könnte, so halte ich es doch für zweckmässig, wenigstens im Allgemeinen zunächst die genannten beiden

Ansichten vorzuführen, weil das Studium des Folgenden sehr erleichtert wird, wenn man sich, wenn auch vielleicht nur vorübergehend, von der Art der Wärmebewegung eine gewisse Vorstellung macht.

Nach *Redtenbacher* *) bestehen die Körper aus unveränderlichen, durch relativ sehr grosse Zwischenräume getrennten Theilchen, den „Körperatomen“. Die Atome sind so klein, dass in einer für unsere Sinne verschwindend kleinen Stoffmenge eine ungemein grosse Anzahl enthalten sein kann und es giebt so viele verschiedene Arten von Atomen, als es chemisch einfache Stoffe giebt; mithin nach dem jetzigen Standpunkte der Chemie 61. Die Körperatome sind schwer, haben ein Gewicht und wirken durch Kräfte auf einander und zwar anziehend. Es können sich mehrere Atome verschiedener Art [nach *Clausius* auch gleicher Art**)] zu einer Gruppe verbinden; eine solche Gruppe heisst ein „Molekül“; auf diese Weise entstehen die chemisch-zusammengesetzten Körper. Neben den Körperatomen enthalten die Körpersubstanzen den ebenfalls aus Atomen bestehenden „Aether“. Der Aether verbreitet sich in dem ganzen unendlichen Raum und durchdringt alle Körper. Die Aetheratome sind träge, aber nicht schwer und sehr klein im Verhältniss zu ihren gegenseitigen Abständen und zu den Körperatomen. Die Aetheratome stossen sich gegenseitig ab und werden von den Körperatomen angezogen. In den Körpern wird der Aether in Folge der genannten Kräfte atmosphärenartig die Körperatome oder die Moleküle umgeben und zwar so, dass jede solche Atmosphäre eine bestimmte Form und Begrenzung haben wird und der Raum zwischen zwei Körperatomen grösstentheils leer ist. Ein Körperatom mit seiner Aetheratmosphäre nennt *Redtenbacher* eine „Dynamide“; ein Molekül, also die Vereinigung meh-

---

*) *Redtenbacher.* „Dynamidensystem“. Grundzüge einer mechanischen Physik. Mannheim 1857.

**) *Clausius.* Ueber die Natur des Ozon's. „Poggendorff's Annalen“. Bd. 103, S. 644.

rerer Körperatome mit der dieselbe gemeinschaftlich umschliessenden Aetherhülle eine „zusammengesetzte Dynamide“.

Somit stimmen die Annahmen genau mit der atomistischen Ansicht überein, wie sie heute von fast allen Physikern und Chemikern angenommen ist. Wesentlich wichtig sind aber die weiteren Bemerkungen *Redtenbacher*'s. Wie jetzt allgemein das Licht durch Aetherschwingungen erklärt wird, so verhält es sich nach *Redtenbacher* auch mit der Wärme, der Elektricität und dem Magnetismus, nur sind diese Erscheinungen eine Folge der Bewegungen der die Atome und Moleküle umgebenden Aetherhüllen. Die Bewegung, die uns als Wärme erscheint, besteht in radialen Schwingungen der Aetherhüllen; dieselben ziehen sich zusammen und erweitern sich. Die elektrischen und magnetischen Erscheinungen sind die Folge einer rotirenden Bewegung dieser Hüllen; die Hüllen drehen sich um den Kern, der durch das Körperatom oder das Molekül gebildet wird. Die Schallbewegung endlich besteht in einer Bewegung der Atome oder Moleküle selbst, wobei die Aetherhüllen an der Bewegung zwar Theil nehmen, diese letztere Bewegung uns aber weder als Wärme, noch als Licht, noch als Elektricität erscheint, weil diese Bewegung weit langsamer geschieht, als es erforderlich ist, damit sich uns die Aetherschwingungen in der genannten Weise äussern. Da sich vorstellen lässt, dass auf irgend einem Wege, selbst auf mechanischem, die radiale Bewegung der Aetherhüllen in rotirende und umgekehrt verwandelt werden kann, so ist dadurch zugleich eine Erklärung der merkwürdigen Erscheinung gegeben, dass Wärme, Licht, Elektricität und Magnetismus, eines aus dem anderen erzeugt werden kann.

Clausius *) hat hinsichtlich der inneren Beschaffenheit

---

*) *Clausius*, Ueber die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen. „Poggendorff's Annalen.“ Bd. 100, S. 353.

Clausius, Ueber das Wesen der Wärme, verglichen mit Licht und Schall. Ein populärer Vortrag. Zürich 1857.

der Körper die gleiche Ansicht, nach ihm besteht aber die Wärmebewegung in der Bewegung der Moleküle, und zwar ist diese Bewegung bei festen, flüssigen und gasförmigen Körpern verschieden. Im festen Zustande bewegen sich die Moleküle um gewisse Gleichgewichtslagen, sie schwingen, und zwar unter Einwirkung der Kräfte, die sie gegenseitig auf einander ausüben. Neben geradlinig schwingenden Bewegungen der Moleküle können auch drehende Schwingungen um den Schwerpunkt und Bewegungen der Bestandtheile, d. h. der Atome des Moleküls, auftreten.

Im flüssigen Zustande findet eine schwingende, wälzende und fortschreitende Bewegung statt, die lebendige Kraft der Bewegung ist im Verhältniss der gegenseitigen Anziehung der Moleküle nicht stark genug, sie ganz von einander zu trennen, sie erhalten sich auch ohne äusseren Druck innerhalb eines gewissen Volumens.

Im gasförmigen Zustande sind die Moleküle ganz aus den Sphären ihrer gegenseitigen Anziehung gekommen und bewegen sich nach den gewöhnlichen Gesetzen gradlinig fort.

Diese Andeutungen mögen hier genügen, im Uebrigen verweise ich auf die genannten Schriften.

§ 2.

Mag nun die Wärmebewegung in Schwingungen der Aetheratome oder der Körperatome oder der Moleküle bestehen, in jedem Fall hat man es mit materiellen Theilchen zu thun, die sich in einem bestimmten Momente mit einer gewissen Geschwindigkeit bewegen, es ist also in denselben eine gewisse mechanische Arbeit angehäuft, da die Grundsätze der Mechanik auch hier noch gültig sein müssen. Je schneller die Bewegung dieser materiellen Theilchen ist, um so grösser ist nach den neueren Ansichten die im Körper angehäufte Wärme, oder um so wärmer erscheint

uns der Körper; da aber dann auch die lebendige Kraft der Bewegung, oder mit anderen Worten: die im Körper angehäufte mechanische Arbeit um so grösser ist, so hat man daraus geschlossen, dass Wärme und mechanische Arbeit ein und dasselbe ist: „Wärme und Arbeit sind äquivalent". Das ist der Grundsatz der mechanischen Wärmetheorie, und von der Richtigkeit dieses Satzes sind alle Anhänger dieser neuen Lehre überzeugt, welche Ansichten sie auch sonst von der Art der Wärmebewegung und darüber haben mögen, was in den Körpern in Bewegung ist. Diese Ansicht wurde in vorstehender Form zuerst von *Mayer**) ausgesprochen.

Der Satz von der Aequivalenz von Wärme und Arbeit führt aber sofort auf eine wichtige Erweiterung, wenn wir ihn mit den Erfahrungen in Uebereinstimmung zu bringen suchen. Es zeigt sich nämlich, dass die im Innern der Körper stattfindende Bewegung, oder die dieser Bewegung entsprechende lebendige Kraft nicht die ganze im Körper befindliche Wärme darstellt, dass also die einem Körper zugeführte Wärme, d. h. mechanische Arbeit, nicht allein dazu verwendet wird, die Schwingungsgeschwindigkeit der Aether- oder Körperatome oder Moleküle zu erhöhen, sondern dass ein Theil dieser Arbeit noch zu Anderem verbraucht wird. Folgen wir hinsichtlich der Anschauung über die innere Beschaffenheit der Körper den Ansichten *Redtenbacher*'s, so lässt sich das Gesagte leicht in folgender Art erklären. Bei der Erwärmung eines Körpers wird zunächst die lebendige Kraft der Aetherhüllen vermehrt, indem man die Schwingungsgeschwindigkeit erhöht. Gleichzeitig aber gehen auch Veränderungen in der gegenseitigen Stellung der Moleküle, oder in der Anordnung der Bestandtheile derselben, der Körperatome, vor sich; solche Veränderungen erfordern, weil diese Bestandtheile mit gewissen Kräften auf einander wirken, ebenfalls Arbeit, und sonach besteht der

---

*) *Mayer*, Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur. „Annalen von Wöhler und Liebig". Maiheft. 1842.

durch Erwärmung eines Körpers hervorgebrachte Zuwachs der im Körper angehäuften Arbeit oder Wärme aus zwei Theilen und ebenso die ganze im Körper enthaltene Wärme oder Arbeit; diese ganze Arbeit nennt man nach *Clausius* die „innere Arbeit“.

Bei der Erwärmung eines Körpers beobachtet man aber in den meisten Fällen noch eine andere Erscheinung: der Körper dehnt sich aus. Während dieser Ausdehnung überwindet er einen von aussen wirkenden Druck, er verrichtet also Arbeit, deren Grösse wir meist messen können. Diese Arbeit nennt man nach *Clausius* die „äussere Arbeit“. Führt man also einem Körper Wärme zu und findet dabei eine Volumenveränderung statt, so wird ein Theil der zugeführten Wärme zu äusserer, der andere zu innerer Arbeit verbraucht; der letztere Theil bringt die vorhin angedeuteten Veränderungen im Innern des Körpers hervor. Findet die Wärmezuführung ohne Volumenveränderung des Körpers statt, so wird die ganze zugeführte Wärme zur Erhöhung der inneren Wärme oder inneren Arbeit verbraucht.

Die Veränderung der inneren Arbeit oder Wärme macht sich uns in vielen Fällen durch Temperaturveränderung bemerkbar, in anderen Fällen, wie beim Schmelzen und Verdampfen, durch Veränderung des Aggregatzustandes, und endlich oft durch beides zugleich.

§ 3.

Einige Beispiele sollen das Vorstehende weiter erläutern:

Denke man sich einen Cylinder, in welchem sich ein Kolben verschieben lässt, mit einem Gase, etwa erhitzter atmosphärischer Luft, gefüllt, so übt dasselbe einen gewissen Druck gegen den Kolben aus und vermag unter Umständen den Kolben fortzuschieben, selbst wenn derselbe belastet ist. Dabei dehnt sich das Gas aus und man beobachtet eine Temperaturabnahme oder eine Verminderung der im Gase

enthaltenen Wärme. Da das Gas Arbeit verrichtet, während es den Kolben mit einer gewissen Kraft um einen bestimmten Weg fortschiebt, und gleichzeitig ein Verschwinden von Wärme beobachtet wird, so liegt der Gedanke nahe, dass beides in einer gewissen Beziehung steht und die einfachste Annahme, die man auch in der mechanischen Wärmetheorie macht, ist die, dass die verschwundene Wärmemenge der verrichteten Arbeit proportional ist. Die verschwundene Wärme ist dabei nicht nur für unser Gefühl verschwunden, sondern im Gase überhaupt nicht mehr vorhanden, sie ist verbraucht worden, die ganze im Gase enthaltene Arbeit ist um die nach Aussen abgegebene Arbeit vermindert worden.

Schiebt man jetzt den Kolben im Cylinder wieder zurück, so wird das Gas durch die verrichtete Arbeit comprimirt; die Beobachtung zeigt, dass dabei das Gas sich erwärmt. Am Ende dieses Versuchs ist also die im Gase enthaltene Wärme grösser, als im Anfange; durch die von uns aufgewandte Arbeit ist sonach Wärme erzeugt worden, die Arbeit wurde vom Gase aufgenommen und giebt sich im vorliegenden Falle durch Temperaturerhöhung zu erkennen.

Wie das Gas, so verhalten sich auch alle anderen Körper. Durch Zusammendrücken und Schlagen fester Körper, überhaupt immer dann, wenn diese Körper Arbeit aufnehmen, beobachten wir Erwärmung und die aus solcher hervorgehenden Veränderungen. Sehr schön zeigt dies ein Versuch, der in neuester Zeit von *Mousson**) angestellt wurde. Ganz wasserfreies Eis wurde im kalten Raume mit Hülfe der hydraulischen Presse comprimirt; die Folge der aufgewandten Arbeit war die Bildung von Wasser, also ein theilweises Schmelzen des Eises. Das Ueberführen des Wassers aus dem festen in den flüssigen Zustand geschieht aber auch, und zwar gewöhnlich, durch Erwärmen; sonach

---

*) *Mousson*, Einige Thatsachen, betreffend das Schmelzen und Gefrieren des Wassers. „Poggendorff's Annalen". Bd. 105, S. 161.

liefert auch dieser Versuch den Beweis, dass durch Wärmezuführung und Aufwendung von mechanischer Arbeit die gleichen Erfolge zu erzielen sind, also Wärme und Arbeit Etwas gleicher Art sein muss.

Einen anderen, ebenfalls hierher gehörigen neuen Versuch verdanken wir *Hirn.**) Dieser Versuch ist nicht nur von besonderer Wichtigkeit für die Technik, sondern liefert auch den schönsten Beweis von der Richtigkeit der neueren Anschauungen über die Wärme. *Hirn* beobachtete, welche Wassermenge in einer bestimmten Zeit im Dampfkessel einer grossen Dampfmaschine in Dampf verwandelt und in den Dampfcylinder geführt wurde. Nach *Regnault*'s Versuchen war, weil Spannung und Temperatur dieses Dampfes beobachtet wurden, die Wärmemenge in demselben bekannt. Der Dampf wurde nach seinem Austritte aus dem Cylinder condensirt und aus der Menge und Temperatur des Einspritzwassers und des condensirten Dampfes die Wärmemenge berechnet, welche der Dampf beim Eintritt in den Condensator noch enthielt.

Nach der mechanischen Wärmetheorie, also nach den oben entwickelten Ansichten, muss die im Dampfe enthaltene Wärme bei seinem Austritte aus dem Dampfcylinder „geringer" sein, als die Wärmemenge, die ihm beim Eintritte innewohnte, und zwar muss die Differenz genau der vom Dampfe verrichteten Arbeit entsprechen. Eine solche Differenz hat *Hirn* nicht nur beobachtet, sondern *Clausius***) hat auch gezeigt, dass die bei *Hirn*'s Dampfmaschine verschwundene Wärmemenge zu der verrichteten Arbeit in dem Verhältnisse stand, wie es die Theorie fordert.

Solche und ähnliche Erfahrungen bestätigen den *Clau-*

---

*) *Hirn*, Recherches sur l'équivalent mécanique de la chaleur, présentées à la société de physique de Berlin. Paris 1858.

**) *Hirn*, A. a. O. S. 134 (Bericht über vorstehendes Werk an die physikalische Gesellschaft zu Berlin von Prof. Dr. *Clausius*).

sius'schen Grundsatz*), der aus dem Satze von der Aequivalenz von Wärme und Arbeit hervorgeht und folgendermassen lautet:

„In allen Fällen, wo durch Wärme Arbeit entsteht, verschwindet eine der erzeugten Arbeit proportionale Wärmemenge, oder wird verbraucht, und umgekehrt durch Verrichtung einer ebenso grossen Arbeit kann dieselbe Wärmemenge wieder erzeugt werden.“

§ 4.

Ehe wir dazu übergehen, diesen Grundsatz zur Entwickelung der ersten Hauptgleichung zu verwenden, mögen noch einige Bemerkungen über das Messen der Wärmemengen vorausgeschickt werden. Bisher nahm man als Wärmeeinheit die Wärmemenge an, welche dazu gehört, ein Kilogramm Wasser von 0^0 um $1^0 C.$ zu erwärmen, diese Wärmemenge heisst eine Calorie. Dasselbe Maass wird auch im Folgenden beibehalten werden, nur lässt sich eine bestimmtere Vorstellung damit verbinden. Da Wärme und Arbeit äquivalent sind, so lässt sich auch für das Maass der Wärmemengen genau dieselbe Maasseinheit zu Grunde legen, die man zum Messen von Arbeit verwendet, also, wenn wir durchgängig französisches Maass und Gewicht annehmen, das Meterkilogramm. Um ein Maass ins andere zu übertragen, käme es nur darauf an, zu wissen, welche Arbeit einer Calorie entspricht. Diese Arbeit, die wir im Folgenden durch $\frac{1}{A}$ bezeichnen werden, heisst das „mechanische

---

*) *Clausius*, Ueber die bewegende Kraft der Wärme und die Gesetze, die sich daraus für die Wärmelehre selbst ableiten lassen. „Poggendorff's Annalen“. Bd. 79, S. 368 u. 500.

Clausius, Ueber eine veränderte Form des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie. „Poggendorff's Annalen“. Bd. 93, S. 481.

Aequivalent der Wärmeeinheit“ und beträgt nach zahlreichen Versuchen, auf die unten noch näher eingegangen werden soll, nahezu 424 Meterkilogramme; umgekehrt ist sonach $A = \frac{1}{424}$, die Wärmemenge, welche der Arbeitseinheit, also 1 Meterkilogramm entspricht, und heisst das „Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit“.

Ist sonach einem Körper bei seiner Erwärmung eine Wärmemenge von Q Calorien zugeführt worden, so bedeutet dies, dass die Wärmemenge Q Mal so gross war, als dazu gehören würde, 1 Kilogramm Wasser von 0^0 um 1^0 zu erwärmen und den Anschauungen der mechanischen Wärmetheorie zufolge entspricht diese Wärmemenge einer Arbeit von $\frac{1}{A} . Q = 424 . Q$ Meterkilogrammen, d. h. wäre diese Wärmemenge in Arbeit verwandelt worden, so hätte man mit Hülfe derselben $424 . Q$ Kilogramme einen Meter hoch heben können.

Wie hier eine Wärmemenge in Arbeit umgesetzt wurde, lässt sich auch das Umgekehrte ausführen; einer Arbeit von L Meterkilogrammen entspricht die Wärmemenge AL oder $\frac{L}{424}$ Wärmeeinheiten. Wäre diese Arbeit auf irgend eine Weise, etwa durch Compression eines Gases, in Wärme verwandelt worden, so würde diese erzeugte Wärme AL Wärmeeinheiten betragen und im Stande sein, AL Kilogramme Wasser von 0^0 um 1^0 zu erwärmen. Diese letztere Umwandlung kommt im Folgenden besonders häufig vor und zwar in einer Weise, die wir sogleich etwas näher erläutern wollen.

Befindet sich z. B. in einem Cylinder, dessen Querschnitt F ist, ein Kolben, und steht dieser in einem bestimmten Momente um x vom Ende entfernt, so ist das Volumen v des darin etwa befindlichen Gases

$$v = Fx .$$

Uebt das Gas gegen die Quadrateinheit (1 Quadratmeter) den Druck von p Kilogrammen aus, so ist der

Druck gegen den Kolben Fp und sonach, wenn in Folge dieses Druckes der Kolben um dx zurückweicht, die vom Gase verrichtete Arbeit:

$$Fpdx,$$

oder weil nach obiger Gleichung $Fdx = dv$ ist, die Arbeit auch

$$pdv.$$

Dieser Arbeit entspricht die Wärmemenge:

$$Apdv$$

und diese Wärmemenge ist es, welche während dieser Arbeitsverrichtung verschwindet. Ist das anfängliche Volumen v_1, das Endvolumen v_2, so ist die während der Ausdehnung verschwundene Wärmemenge:

$$A\int_{v_1}^{v_2} pdv.$$

Diese Integration kann nur ausgeführt werden, wenn das Gesetz bekannt ist, nach welchem sich p mit v ändert, und dieses Gesetz wird wesentlich davon abhängen, ob dem Gase während der Ausdehnung Wärme von aussen zugeführt wird, und in welcher Weise das geschieht.

Die Formel für die in Arbeit verwandelte Wärmemenge

$$Apdv$$

ist selbst dann noch gültig, wenn die Ausdehnung in anderer Weise, als der oben angenommenen stattfindet, und gilt auch für jeden beliebigen festen oder flüssigen Körper, wenn man unter p den Druck versteht, der an allen Punkten der Oberfläche gleich stark wirkt, normal gegen die Oberfläche gerichtet ist und in jedem Augenblicke so wenig von der ihm entgegengesetzten Ausdehnungskraft des Körpers verschieden ist, dass man beide als gleich voraussetzen kann.

§ 5.

Nach diesen Vorbereitungen kann nun zur Entwickelung der beiden Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie übergegangen werden, die uns dann in den Stand setzen, das Verhalten der Körper speciell zu untersuchen.

Wenn im Folgenden das Gegentheil nicht besonders hervorgehoben wird, so soll das Gewicht des Körpers, mit welchem verschiedene Veränderungen vorgenommen werden sollen, gerade ein Kilogramm betragen, und das Volumen desselben dann allgemein mit v bezeichnet werden; der Druck (pro 1 Quadratmeter) in dem schon angedeuteten Sinne sei p, die Temperatur t, endlich sei die im Körper enthaltene Wärme, also die innere Wärme $= U$.

Sobald von den genannten Grössen zwei, also etwa v und p, bekannt sind, so sind nach allen bisherigen Erfahrungen auch die beiden anderen bestimmt, so dass also angenommen werden muss, dass folgende beiden Gleichungen stattfinden:

$$U = F(v, p) \text{ und } t = f(v, p),$$

wonach sowohl U als t Functionen von v und p sind; Functionen, auf deren nähere Bestimmung, besonders der ersteren, es zunächst ankommen wird.

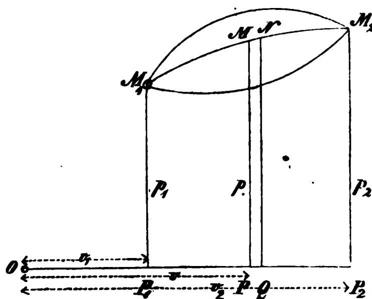
Waren anfänglich die entsprechenden Werthe von U, v und p gleich U_1, v_1, p_1, so fand die Beziehung

$$U_1 = F(v_1, p_1)$$

statt und wurden durch Wärmezuführung die Werthe in U_2, v_2, p_2 umgewandelt, so gilt auch

$$U_2 = F(v_2, p_2).$$

Fig. 1.



In Figur 1 sind die Werthe v_1 und v_2 als Abscissen und die Werthe p_1 und p_2 als Ordinaten aufgetragen. Während in Folge von Wärmezuführung das Volumen wächst, durchläuft der Endpunkt der zugehörigen Ordinate p irgend eine beliebige Curve, die durch M_1 und M_2 geht. Die letze Gleichung spricht nun aus, dass die am Ende im Körper enthaltene Wärme U_2 nur von den Werthen v_2 und p_2

abhängt und durch diese **vollständig** bestimmt ist. Ebenso ist auch der Zuwachs der inneren Wärme

$$U_2 - U_1 = F(v_2, p_2) - F(v_1, p_1)$$

nur abhängig von den Anfangs- und Endwerthen der Grössen v und p, **nicht** aber davon, nach welchem Gesetze der Werth von p während des Wachsens von v aus dem Anfangswerthe p_1 in den Endwerth p_2 übergegangen ist. Welche der unendlich vielen möglichen Curven also auch der Endpunkt der Ordinate p während des Wachsens von v durchlaufen haben mag, die Kenntniss des Gesetzes dieser Curve ist zur Bestimmung der Veränderung **der inneren Wärme** nicht erfordert, sondern es genügt hierzu vollkommen die Kenntniss der Anfangs- und Endwerthe der Grössen v und p, wenn sonst nur das Gesetz bekannt ist, nach welchem sich die im Körper angehäufte Wärme aus v und p berechnet, d. h. wenn die Form der Function

$$U = F(v, p) \tag{1}$$

gegeben ist.

Wächst, wenn wir irgend einen beliebigen Zwischenzustand annehmen, das Volumen um dv, der Druck um dp, so ist die Zunahme der inneren Wärme:

$$dU = \left(\frac{dU}{dp}\right) dp + \left(\frac{dU}{dv}\right) dv.$$

Setzen wir die partiellen Differentiale:

$$\left(\frac{dU}{dp}\right) = X \text{ und } \left(\frac{dU}{dv}\right) = Z,$$

so schreibt sich auch:

$$dU = Xdp + Zdv, \tag{2}$$

und zwar gilt, weil dies ein vollständiges Differential ist, auch die Gleichung:

$$\frac{dX}{dv} = \frac{dZ}{dp}. \tag{3}$$

Das zuletzt Gesagte bezieht sich auf den Zuwachs **der im Körper enthaltenen Wärme**, wenn das Volumen um dv und der Druck um dp wächst; ganz anders sind aber die Verhältnisse, wenn nach der Wärmemenge gefragt wird,

die dem Körper von aussen zuzuführen war, damit v und p in dieser Weise zunahm.

Sind $OP = v$ und $PM = p$ (Fig. 1) Volumen und Druck in einem bestimmten Momente, so war nach Gleichung (1) die innere Wärme bekannt. Wächst nun aber in Folge der Wärmezuführung von aussen das Volumen um dv, so verrichtet der Körper die äussere Arbeit $p\,dv$ und diese erfordert nach Obigem die Wärmemenge:

$$Ap\,dv.$$

Da nun gleichzeitig die innere Wärme um dU zunimmt, so beträgt offenbar die von aussen zuzuführende Wärme, die wir mit dQ bezeichnen wollen, damit das Volumen um dv, der Druck um dp wachse:

$$dQ = dU + Ap\,dv, \tag{4}$$

und daraus ergiebt sich durch Integration mit Rücksicht auf die Bezeichnung in Figur 1 die ganze von aussen zuzuführende Wärmemenge Q, wenn die Werthe v_1 und p_1 in v_2 und p_2 übergehen:

$$Q = U_2 - U_1 + A\int_{v_1}^{v_2} p\,dv, \tag{5}$$

oder: $$Q = F(v_2, p_2) - F(v_1, p_1) + A\int_{v_1}^{v_2} p\,dv. \tag{6}$$

§ 6.

Nun ist aber $p\,dv$ nichts anderes, als das Flächenelement $PQNM$ (Figur 1) und sonach das in (6) angedeutete Integral einfach die von der Curve M_1MM_2 begrenzte Fläche $P_1P_2M_2MM_1$. Diese Fläche repräsentirt also die vom Körper während der Wärmezuführung verrichtete Arbeit, und diese Fläche lässt sich nur bestimmen, oder, mit anderen Worten, die in Gleichung (6) angedeutete Integration lässt sich nur ausführen, wenn das Gesetz der Curve M_1MM_2 bekannt ist, d. h. wenn man weiss, in welcher Weise der Körper während der Zuführung von Wärme aus dem Anfangszustand in den Endzustand übergegangen ist.

Daraus geht ferner hervor, dass auch nach Gleichung (6) die ganze von aussen zuzuführende Wärme **nicht**, wie dies mit der Veränderung der inneren Wärme der Fall war, durch den Anfangs- und Endzustand des Körpers allein zu bestimmen ist, sondern dazu noch die Kenntniss des ganzen Weges erforderlich ist, welchen der Werth von p zurücklegt; denn nur unter dieser Voraussetzung ist die auf der rechten Seite der Gleichung (6) angedeutete Integration zu vollziehen.

Die Gleichung (4) lässt sich noch anders schreiben, wenn man statt dU den Werth aus Gleichung (2) setzt und zwar:

$$dQ = Xdp + Zdv + Apdv,$$

oder:

$$dQ = Xdp + (Z + Ap)\, dv. \tag{7}$$

Setzen wir hierin, weil dadurch alle weiteren Formeln eine einfachere Gestalt gewinnen:

$$Z + Ap = Y, \tag{8}$$

so folgt:

$$dQ = Xdp + Ydv. \tag{I}$$

In dieser Form soll die Gleichung in Zukunft immer benutzt werden, sie ist natürlich mit Gleichungen (4) und (7) identisch, und wie so eben erörtert wurde, nicht integrabel, so lange nicht eine zweite Gleichung gegeben ist, aus welcher der Gang der durch die Erwärmung im Körper hervorgehenden Veränderungen von p erkenntlich ist.

Die Werthe X und Y sind Functionen von v und p, die zwar vorläufig noch unbekannt sind, und deren Bedeutung aus den Gleichungen (2) und (8) deutlich hervorgeht, deren Zusammenhang aber noch durch Folgendes klarer hervortritt:

Differenziirt man Gleichung (8) auf beiden Seiten in Hinsicht auf p, so folgt:

$$\frac{dZ}{dp} + A = \frac{dY}{dp},$$

und setzt man den daraus für $\frac{dZ}{dp}$ hervorgehenden Werth in Gleichung (3), so folgt:

$$\frac{dY}{dp} - \frac{dX}{dv} = A, \qquad \text{(II)}$$

und das ist die erste Hauptgleichung der mechanischen Wärmetheorie, wie sie zuerst von *Clausius*, wenn auch in anderer Form, aufgestellt wurde. Wenn wir auch nicht schon aus dem Gange der ganzen Ableitung wüssten, dass Gleichung (I) nicht integrabel ist, so würden wir das doch sofort aus Gleichung (II) erkennen; die Bedingung der Integrabilität ist, dass die linke Seite der Gleichung (II) gleich Null wäre, während sie im vorliegenden Falle gleich einer Constanten und zwar gleich dem „Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit" ist.

§ 7.

Mit Hülfe der beiden Gleichungen (I) und (II) und der ihnen zu Grunde liegenden Anschauungen lassen sich schon, besonders für Gase, eine Reihe wichtiger Gesetze ableiten; zum tieferen Studium ist aber noch eine weitere Gleichung erforderlich, deren Ableitung zunächst erfolgen mag.

Dabei werden wir uns eines von *Carnot**) ersonnenen, und mit so schönen Erfolgen von *Clapeyron***) und *Clausius* angewandten Verfahrens bedienen, indem wir mit dem Körper verschiedene Veränderungen vornehmen; wir werden ihm in gleich näher anzudeutender Art Wärme von aussen zuführen, dann wieder entziehen, den Körper sich ausdehnen lassen und wieder zusammendrücken u. s. w., dabei aber dafür sorgen, dass der Körper am Ende der Operationen wieder in seinem anfänglichen Zustande ist, so dass auch seine innere Wärme die gleiche ist, wie im Anfange. Beobachten wir dabei, dass äussere Arbeit verrichtet

---

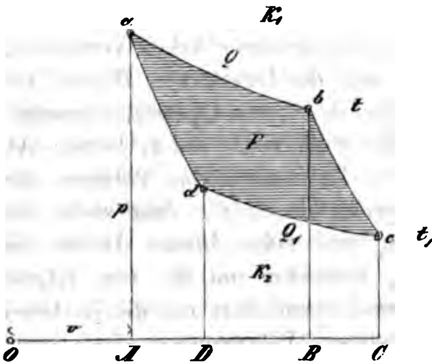
*) *Carnot*, Réflexions sur la puissance motrice du feu. 1824.

**) *Clapeyron*, Ueber die bewegende Kraft der Wärme. Deutsch in „Poggendorff's Annalen". Bd. 59, S. 446. Aus dem „Journal de l'école polytechnique". t. XIV (1834), S. 170.

wurde und dass Wärme verschwand, so müssen wir schliessen, dass diese letztere Wärme nur zu dieser äusseren Arbeit verbraucht wurde, weil ja der Körper wieder in seinem anfänglichen Zustande ist, seine innere Wärme sich also weder vermindert, noch vermehrt hat. Die folgende Betrachtung, bei der wir die von *Clapeyron* angegebene, graphische Darstellung benutzen, wird das Gesagte näher erläutern.

Es sei das Volumen der Gewichtseinheit eines Körpers v und der Druck p, seine Temperatur t und die gesammte im Innern enthaltene Wärme U. In Figur 2 ist $OA = v$ als Abscisse, $Aa = p$ als Ordinate aufgetragen; diesem Körper (am bequemsten übersieht man den Vorgang, wenn man sich den Körper im gasförmigen Zustande vorstellt) gestattet man, sich auszudehnen, sorgt aber dafür, dass er während dieser Ausdehnung immer die gleiche Temperatur t behält. Zu diesem Zwecke müssen wir ihm während seiner Ausdehnung Wärme von aussen **zuführen.** Man stellt sich dies am besten in der Art vor, dass wir den Körper mit einem anderen Körper K_1 in Berührung erhalten, dessen Temperatur t ist, und der so gross ist, dass trotz der Wärmeentziehung seine Temperatur als gleichbleibend angenommen werden kann. Die Ausdehnung des Körpers soll so weit fortgesetzt werden, bis das Volumen $OA = v$ in das Volumen OB und der Druck Aa in den Druck Bb übergegangen ist. Im Allgemeinen wird der Druck abnehmen (bei einem Gase bekanntlich nach dem *Mariotte*'schen Gesetze). Während dieser Ausdehnung ist

Fig. 2.



die innere Wärme verändert worden, und gleichzeitig hat der Körper eine Arbeit verrichtet, die durch die Fläche $ABba$ dargestellt wird. Die Wärmemenge, die er dabei vom Körper K_1 bezog, sei Q.

Nachdem der Körper das Volumen OB und den Druck Bb erlangt hat, wollen wir den Körper K_1 entfernen und nun unserem Körper eine weitere Ausdehnung von OB auf OC gestatten. Dabei soll aber auf irgend eine Weise dafür gesorgt werden, dass dem Körper weder von aussen Wärme zugeführt wird, noch dass er Wärme nach aussen hin abgeben kann. Dann wird er während der angenommenen Ausdehnung eine Arbeit verrichten, die durch die Fläche $BCcb$ dargestellt wird, und da der Annahme gemäss die Ausdehnung ohne Wärmezuführung erfolgt, so wird ein entsprechender Theil seiner inneren Wärme, die er beim Volumen OB besass, zu äusserer Arbeit verwendet; in Folge dessen sinkt nicht nur der Druck von Bb auf Cc, und zwar rascher, als dies bei der ersten Operation geschah, sondern die Temperatur sinkt auch von t auf t_1 herab. Am Ende der zweiten Operation ist sonach das Volumen des Körpers durch OC, der Druck durch Cc dargestellt, die Temperatur desselben ist t_1 und seine innere Wärme ist gleich der anfänglichen U, vermehrt um die vom Körper K_1 empfangene Wärme Q und vermindert um die in Arbeit verwandelte Wärme. Die letztere Wärmemenge findet sich, wenn man die durch die Flächen $ABba$ und $BCcb$ repräsentirte äussere Arbeit mit A, dem Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit, multiplicirt.

Der Körper soll nun wieder zusammengedrückt werden und zwar in der Art, dass jetzt während dieser dritten Operation die Temperatur constant, also $= t_1$ bleibe. Durch die Zusammendrückung würde sich aber der Körper erwärmen, und damit das nicht geschieht, muss ihm ein entsprechender Theil von Wärme während der Compression **entzogen** werden. Zu diesem Zwecke bringen wir unsern Körper während der Zusammendrückung mit einem anderen Körper K_2 in Berührung, welcher die Temperatur t_1 hat

und der so gross ist, dass trotz der Aufnahme von Wärme seine Temperatur constant bleibt, er also auch unseren Körper, wie verlangt, so abkühlt, dass dessen Temperatur fortwährend dieselbe bleibt. Die Zusammendrückung unseres Körpers, in Berührung mit dem Körper K_2, setzen wir aber nur so weit fort, bis das Volumen $= OD$ und der Druck $= Dd$ ist, und zwar so, dass, wenn wir jetzt den Körper ohne Wärmezuführung und ohne Wärmeableitung vollends auf sein anfängliches Volumen $OA = v$ zusammendrücken, auch sein Druck, also auch seine innere Wärme und seine Temperatur, wieder die anfängliche wird, da die innere Wärme und Temperatur nur Functionen von v und p sind. Während der dritten Operation, als unser Körper mit dem Körper K_2 in Berührung stand, gab er an den Letzteren Wärme ab; diese ganze vom Körper K_2 aufgenommene Wärme sei Q_1; und dabei musste, um den Körper vom Volumen OC auf das Volumen OD zusammenzudrücken, eine gewisse Arbeit aufgewandt werden, die durch die Fläche $DCcd$ dargestellt wird. Um den Körper endlich vollends auf sein anfängliches Volumen zusammenzudrücken, war die Arbeit erforderlich, die durch die Fläche $ADda$ repräsentirt wird.

§ 8.

Ueberblicken wir den ganzen Prozess in der Kürze noch einmal, so bemerken wir, dass während der beiden ersten Operationen der Körper von dem wärmeren Körper K_1 die Wärmemenge Q empfing und die äussere Arbeit verrichtete, die durch die Flächen $ABba$ und $BCcb$ dargestellt wird.

Während der dritten Operation gab er die Wärmemenge Q_1 an den kälteren Körper K_2 ab und erforderte, damit er am Ende wieder das anfängliche Volumen und den anfänglichen Druck erhielt, einen Aufwand von Arbeit, der durch die beiden Flächen $ADda$ und $DCcd$ dargestellt wird.

Während die erst bezeichneten Flächen die Arbeit geben, welche der Körper bei der Ausdehnung verrichtete, geben die letztgenannten Flächen die Arbeit, welche der Körper von uns erforderte, damit er in seinen anfänglichen Zustand zurückkehre; die erstere Arbeit ist aber, wie ein Blick auf die Figur lehrt, grösser als die letztere; es ist die Differenz durch die schraffirte Fläche *abcd* ausgedrückt. Es ist also, trotzdem, dass der Körper wieder in seinem anfänglichen Zustande ist, Arbeit verrichtet worden, dieser Arbeit muss ein Verschwinden einer gewissen Wärmemenge entsprechen, die wir sofort bestimmen können. Nennen wir F den Inhalt der Figur *abcd*, so ist F diese vom Körper verrichtete Arbeit, und dieser entspricht nach unserem früheren Grundsatze die Wärmemenge:

$$AF.$$

Der Körper selbst hat keine Wärme verloren, wohl aber entzog er während des angedeuteten Processes dem Körper K_1 die Wärmemenge Q und gab dem Körper K_2 die Wärmemenge Q_1; es muss sonach die letztere Wärmemenge kleiner, als die erstere gewesen sein, und zwar die Wärmemenge $Q - Q_1$ verschwunden, oder richtiger gesagt, in Arbeit verwandelt worden sein; es gilt sonach die Gleichung:

$$AF = Q - Q_1. \tag{9}$$

Es ist wohl zu bemerken, dass die Verhältnisse im Ganzen nicht mehr die anfänglichen sind. Der wärmere Körper K_1, dessen Temperatur t ist, hat die Wärmemenge Q verloren, und der kältere Körper K_2 von der Temperatur t_1 die Wärmemenge Q_1 empfangen, und die Wärmemenge $Q - Q_1$ ist in Arbeit verwandelt worden. Nur unser Körper, der vermittelnde, und der, was speciell hervorzuheben ist, während des ganzen Prozesses nur mit Körpern in Berührung kam, die gleiche Temperatur mit ihm hatten, ist genau in seinen anfänglichen Zustand zurückgekehrt.

Während bei diesem Prozesse Arbeit gewonnen wurde, also eine gewisse Wärmemenge $Q - Q_1$ verschwand, und eine andere Wärmemenge Q_1 vom wärmeren Körper K_1 zum kälteren Körper K_2 übergeführt wurde, lässt sich ein

anderer Prozess vorführen, bei dem alles in umgekehrter Weise vorkommt.

Nehmen wir wieder, um das zu zeigen, Figur 2 vor, und denken uns den Körper wieder in seinem Anfangszustand, so lassen sich die verschiedenen Operationen auch in folgender Art ausführen. Der Körper soll sich zunächst ausdehnen, so dass sein Volumen von OA auf OD zunimmt. Wenn wir dabei dem Körper weder Wärme von aussen zuführen, noch ihm entziehen, so giebt die Curve ad die Veränderlichkeit von p an, und Dd ist der Druck am Ende dieser ersten Operation; dabei hat der Körper die durch die Fläche $ADda$ ausgedrückte Arbeit verrichtet und seine Temperatur ist von t auf t_1 gesunken.

Jetzt soll sich der Körper noch weiter von OD auf OC und zwar bei der constanten Temperatur t_1 ausdehnen; damit das Letztere geschehe, bringen wir ihn mit dem Körper K_2, dessen Temperatur t_1 war, in Berührung; dieser Körper wird dem sich ausdehnenden Körper die Wärmemenge Q_1 mittheilen; die während dieses zweiten Theiles vom Körper verrichtete Arbeit ist durch die Fläche $DCcd$ ausgedrückt.

Jetzt wird der Körper K_2 entfernt und wir drücken den Körper nun, ohne Wärme zu- noch abzuführen, auf das Volumen OB zusammen, wobei sein Druck von Cc auf Bb steigt; die von uns aufzuwendende Arbeit ist durch $BCcb$ dargestellt. Die Temperatur des Versuchskörpers ist dadurch von t_1 auf t gestiegen.

Endlich comprimiren wir ihn in Berührung mit dem Körper K_1, bis er sein anfängliches Volumen und seine anfängliche Spannung wieder erhalten hat. In Folge der Berührung mit K_1 bleibt während der Compression die Temperatur constant, und der entsprechende Theil Q der durch Compression entstehenden Wärme wird vom Körper K_1 aufgenommen.

Der Versuchskörper ist jetzt wieder genau in seinem anfänglichen Zustande, die weiteren Zustände sind aber verschieden. Während der Ausdehnung hat der Körper die Arbeit verrichtet, welche durch die Summe der beiden

Flächen $ADda$ und $DCcd$ repräsentirt wird und in der zweiten Periode derselben hat er vom kälteren Körper K_2 die Wärmemenge Q_1 aufgenommen.

Zur Compression des Körpers war die durch die Fläche $BCcb$ und $ABba$ dargestellte Arbeit von uns aufzuwenden, und in der zweiten Periode derselben gab der Körper an den Körper K_1 die Wärmemenge Q ab.

Da die aufgewandte Arbeit grösser, als die vom Körper verrichtete Arbeit ist, so ist im Ganzen Arbeit verbraucht worden, und zwar wird diese verbrauchte Arbeit durch die Fläche $abcd$ ausgedrückt. Diese Arbeit muss in Wärme verwandelt worden sein, und zwar wird die erzeugte Wärmemenge

$$AF$$

betragen, und es wird auch hier die Gleichung gelten

$$AF = Q - Q_1.$$

Der Unterschied gegen den ersten Process besteht also hier darin, dass die Wärmemenge $AF = Q - Q_1$ aus Arbeit erzeugt wurde, und dass gleichzeitig die Wärmemenge Q_1 vom kälteren Körper K_2 zum wärmeren Körper K_1 geführt wurde.

Man erkennt, dass jetzt alles in den Zustand zurückgebracht worden ist, der bei Beginn des ersten Prozesses stattfand; während wir im ersten Prozesse die Wärmemenge $Q - Q_1$ in Arbeit verwandelten, trat die Wärmemenge Q_1 vom wärmeren Körper zum kälteren Körper; im zweiten Prozess hingegen verwandelten wir die gewonnene Arbeit wieder in Wärme; dabei trat aber die Wärmemenge von dem kälteren Körper K_2 in den wärmeren K_1 zurück.

Am Ende eines jeden beider Processe war der vermittelnde Körper wieder in den anfänglichen Zustand zurückgekehrt.

§ 9.

Genau dieselben Operationen sollen jetzt mit einem anderen Körper vorgenommen werden, dessen Volumen v', dessen Druck p', dessen Temperatur aber die gleiche,

nämlich t ist. Unterwerfen wir diesen Körper dem ersten der oben beschriebenen Prozesse, so wird er, während er sich bei constanter Temperatur ausdehnt (Figur 2), dem Körper K_1 eine Wärmemenge entziehen, die mit Q' bezeichnet werden mag. Die weitere Ausdehnung, die ohne Wärmezuführung und ohne Wärmeableitung stattfinde, soll so weit geschehen, dass seine Temperatur auch von t auf t_1 sinkt. Bei der Zusammendrückung bei constanter Temperatur t_1, also in Berührung mit dem Körper K_2, soll er diesem die Wärmemenge Q'_1 abgeben. Endlich soll er weiter zusammengedrückt werden, so dass er sein anfängliches Volumen und die anfängliche Spannung wieder erreicht hat, wobei wir eben voraussetzen, dass der Prozess in ganz gleicher Weise geleitet wird, wie es oben mit dem ersten Versuchskörper angedeutet wurde. Die in Arbeit verwandelte Wärme ist dann hier:

$$AF_1 = Q' - Q'_1,$$

wenn wir in diesem Falle die Fläche $abcd$ mit F_1 bezeichnen und die vom Körper K_1 nach dem Körper K_2 geführte Wärmemenge, wie erwähnt, mit Q'_1.

Es soll nun angenommen werden, dass hier der Prozess so geleitet wurde, dass die in Arbeit verwandelte Wärme genau so gross ausfiel, wie bei obigem Körper, so dass also die Gleichungen:

$$F = F_1$$

$$Q - Q_1 = Q' - Q'_1$$

stattfinden.

Aus dieser Gleichung schliesst man, dass unter den gemachten Voraussetzungen

$$Q' = Q + k$$

$$Q'_1 = Q_1 + k$$

sein muss, wobei k irgend eine bis jetzt noch unbekannte positive oder negative Grösse ist. Es lässt sich aber nun zeigen, dass unter den gemachten Voraussetzungen $k = 0$ sein muss; um das zu beweisen, wollen wir den ersten Körper, der am Anfange des Versuchs das Volumen v und den Druck p hatte, mit (v, p) bezeichnen, den Werth k positiv annehmen und den oben beschriebenen

ersten Prozess ausführen; wir fanden dabei, dass die Wärmemenge

$$Q - Q_1$$

in Arbeit verwandelt wurde und die Wärmemenge Q_1 vom wärmeren Körper K_1 zum kälteren Körper K_2 überging.

Als wir den umgekehrten Prozess mit dem gleichen Körper ausführten, wurde die Wärmemenge $Q - Q_1$ wieder erzeugt und die Wärmemenge Q_1 vom kälteren Körper K_2 nach dem wärmeren K_1 zurückgeführt.

Nachdem jedoch der erste Prozess mit dem ersten Körper (v, p) ausgeführt ist, wollen wir den zweiten Körper, dessen Volumen und Druck v' und p' ist, und den wir daher einstweilen mit (v', p') bezeichnen, dazu verwenden, den umgekehrten Prozess auszuführen. Dann wird auch hier die Wärmemenge $Q - Q_1$ wieder erzeugt, weil wir $Q - Q_1 = Q' - Q'_1$ voraussetzen, es wird aber die Wärmemenge

$$Q'_1 = Q_1 + k$$

nach dem Körper K_1 zurückgeführt. Alles wäre sonach wie vorhin, als wir den Körper (v, p) auch beim umgekehrten Prozess anwendeten; beide Körper sind im anfänglichen Zustande, die erst erzeugte Wärme ist wieder in Arbeit verwandelt, aber wir hätten jetzt eine grössere Wärmemenge $Q_1 + k$ vom kälteren Körper K_2 zum wärmeren Körper K_1 zurückgeführt, als wir erst umgekehrt geleitet hatten. Da wir beide Prozesse beliebig oft wiederholen können, indem wir in der bezeichneten Weise die beiden Körper (v, p) und (v', p') abwechselnd anwenden, so würde daraus hervorgehen, dass wir mit Nichts, ohne Aufwand von Arbeit oder Wärme, fortwährend Wärme von einem Körper von niederer zu einem Körper von höherer Temperatur überführen könnten; was eine Ungereimtheit wäre.

Wir müssen daher schliessen, das k keine positive Grösse ist.

In ähnlicher Weise lässt sich auch zeigen, dass k keine negative Grösse sein kann. Man würde nämlich das gleiche, gegen alle Erfahrung sprechende Resultat erhalten, wenn wir nur den Körper (v', p') erst,

d. h. zur Erzeugung von Arbeit, und dann den Körper (v, p) zu Wiedererzeugung von Wärme benutzen würden.

Daraus geht hervor, dass unter den gemachten Voraussetzungen
$$k = 0,$$
also
$$Q = Q'$$
$$Q_1 = Q'_1$$
sein muss; d. h. wenn wir mit zwei verschiedenen Körpern von gleicher Temperatur aber verschiedenen Volumen und Druck den obigen Prozess so ausführen, dass die gleiche Wärmemenge in Arbeit verwandelt wird, oder umgekehrt, dass dann auch die gleiche Wärmemenge Q_1 vom wärmeren zum kälteren Körper oder umgekehrt geleitet wird.

Hieraus schliesst man zunächst, dass nicht nur die verschwundene, sondern auch die übergeführte Wärme zu der gewonnenen Arbeit in einem bestimmten Verhältnisse steht.

§ 10.

Bisher setzten wir voraus, dass die gleiche Arbeit gewonnen werde, wenn wir mit beiden Körpern (v, p) und (v', p') den ersten Prozess ausführen; nehmen wir hingegen an, dass beim zweiten Körper eine n-fache Arbeit gewonnen wird, setzen wir also:
$$AF_1 = n . AF,$$
so folgt auf gleichem Wege auch:
$$Q' = n . Q$$
$$Q'_1 = n . Q_1,$$
woraus sich durch Division:
$$\frac{Q'}{Q'_1} = \frac{Q}{Q_1}$$
ergiebt.

Wir sehen also, dass unter den obigen Voraussetzungen, nämlich, dass Volumen und Druck beider Körper beliebige und dass nur die Temperaturen t und t_1 gleich seien, die Quotienten $\frac{Q}{Q_1}$ und $\frac{Q'}{Q'_1}$ dieselben sein müssen.

Wir müssen daraus schliessen, dass diese Quotienten vom Volumen v und dem Drucke p des vermittelnden Körpers ganz unabhängig sind. Nichts aber beweist, dass sie auch unabhängig von der Temperatur sind, vielmehr muss man annehmen, dass die folgende Gleichung stattfinde

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{F(t)}{F(t_1)}; \text{*)}$$

wo $F(t)$ eine noch zu bestimmende Temperaturfunction bedeutet. Da diese Function, die eine für alle Körper gleiche Temperaturfunction ist, in den meisten Gleichungen vorkommt, so wollen wir die einfachere Bezeichnung:

$$T = F(t) \text{ und } T_1 = F(t_1)$$

einführen; dann schreibt sich einfacher die letzte Gleichung:

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{T}{T_1}. \tag{10}$$

Daraus folgt:

$$Q_1 = Q.\frac{T_1}{T},$$

und daher die bei dem ersten der oben beschriebenen Prozesse verwandelte Wärme:

$$Q - Q_1 = Q.\frac{T - T_1}{T},$$

und also nach Gleichung (9)

$$AF = Q.\frac{T - T_1}{T}, \tag{11}$$

wo F die aus der verschwundenen Wärme entstandene Arbeit bedeutet, die in Figur 2 durch die Fläche *abcd* dargestellt wird.

Ersetzt man den Werth Q in Gleichung (11) durch den Werth, der sich dafür aus Gleichung (10) ergiebt, so folgt auch

---

*) So weit wurde in der letzteren der vorstehenden Betrachtungen im Allgemeinen ein Weg eingeschlagen, der zuerst von *Reech* betreten wurde:

Reech, Récapitulation très-succincte des recherches algébriques faites sur la théorie des effets mécaniques de la chaleur par différents auteurs. („Liouville". Journal de Mathématiques. Deuxième série. Tome I. 1856.)

$$AF = Q_1 \cdot \frac{T - T_1}{T_1} . \qquad (12)$$

In dieser Form wurde die Gleichung zuerst von *Thomson* und *Rankine**) gegeben.

Man erkennt daraus, was schon oben erwähnt wurde, dass nicht nur die verschwundene, sondern auch die übergeführte Wärme Q_1 zu der gewonnenen Arbeit F in einem bestimmten Verhältnisse steht.

Dies und der ganze Gang der vorstehenden Entwickelungen erklärt den folgenden Fundamentalsatz der mechanischen Wärmetheorie, der zuerst von *Carnot* (1824) aufgestellt wurde:

„Dem Uebergange einer gewissen Wärmemenge aus einem Körper (K_1) von höherer zu einem anderen (K_2) von niederer Temperatur ist ein gewisses Arbeitsquantum äquivalent, wenn im Zustande des vermittelnden Körpers keine bleibenden Veränderungen eintreten. (Die Quantität der Wärme bleibt dabei constant.)

Auf diesem Satze beruhen die Arbeiten von *Carnot* (s. oben), *Clapeyron* (s. oben), *Holtzmann***) u. A. Dieser Satz findet durch die obigen Betrachtungen seine Bestätigung, nur der in Parenthese bemerkte Nachsatz ist, wie *Clausius* zuerst zeigte, unrichtig, nach ihm, und das zeigt auch obige Untersuchung, verschwindet ein der gewonnenen Arbeit entsprechender Theil $Q - Q_1$ der Wärmemenge, und der Rest Q_1 ist die wirklich übergeführte Wärme, die, wie der *Carnot*'sche Satz richtig bemerkt, (ebenfalls) zu der gewonnenen Arbeit in bestimmtem Verhältniss steht.

§ 11.

Aus der Gleichung (11), die sich zunächst nur auf den speciell betrachteten Fall bezieht, lässt sich nun eine all-

*) Phil. Mag. Juli 1851.

**) *Holtzmann*, Ueber die Wärme und Elasticität der Gase und Dämpfe. Mannheim 1845.

gemeine und zwar die zweite Hauptgleichung der mechanischen Wärmetheorie entwickeln.

Betrachtet man zu diesem Zwecke Figur 2 und vergegenwärtigt sich, dass im zweiten Theile der Ausdehnung weder Wärme zu- noch abgeführt wurde, und dass dabei die Temperatur von t auf t_1 sank, so können wir jetzt die Temperaturdifferenz $t - t_1$ unendlich klein, also dt setzen, dann wird auch in Gleichung (11)

$$T - T_1 = dT$$

und die beim obigen Prozesse gewonnene Arbeit dF zu setzen sein; wir erhalten dann statt Gleichung (11):

$$AdF = Q \cdot \frac{dT}{T}. \qquad (13)$$

Nun ist die Temperatur t eine für jeden Körper bestimmte Function von v und p, so dass sich zunächst ergiebt

$$dt = \left(\frac{dt}{dp}\right) dp + \left(\frac{dt}{dv}\right) dv. \qquad (14)$$

Ferner war T nur eine Function von t, sonach ist auch:

$$dT = \frac{dT}{dt} dt, \qquad (15)$$

und daher schreibt sich zunächst auch die Gleichung (13) in folgender Form:

$$AdF = \frac{Q}{T} \cdot \frac{dT}{dt} dt. \qquad (16)$$

Dabei stellen wir uns vor, dass bei obigen Prozessen die Ausdehnung bei der ersten Operation beliebig von OA auf OB stattfinde, der zweite Theil der Ausdehnung aber, also von OB auf OC, unendlich klein sei.

Nehmen wir aber auch den ersten Theil der Ausdehnung unendlich klein, setzen wir also $AB = dv$, so ist in Gleichung (16) dQ statt Q zu setzen, und zwar wird sein nach Gleichung (I):

$$dQ = Xdp + Ydv,$$

oder, da der Voraussetzung gemäss die Temperatur t während der Wärmezuführung constant ist, so ist $dt = 0$, und sonach nach Gleichung (14):

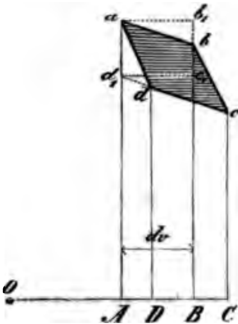
$$0 = \left(\frac{dt}{dp}\right) dp + \left(\frac{dt}{dv}\right) dv.$$

Aus dieser Gleichung bestimmt sich dp, und setzt man das in die Formel für dQ, so folgt für vorliegenden Fall:

$$dQ = \frac{Y\left(\frac{dt}{dp}\right) - X\left(\frac{dt}{dv}\right)}{\left(\frac{dt}{dp}\right)} . dv. \tag{17}$$

Ferner lässt sich nun auch in Gleichung (16) der Werth dF ausdrücken. Da die Ausdehnungen unendlich klein sind, so lassen sich die Curvenstücke ab, bc, cd, da der Figur 2 als gerade Linien ansehen, und die von diesen Curven umschlossene Fläche $abcd$, welche oben die gewonnene Arbeit repräsentirt, erscheint, wie Figur 3 darstellt, als ein unendlich kleines Parallelogramm, dessen Inhalt leicht zu bestimmen ist. Offenbar ist der Inhalt desselben gleich dem Inhalte des Rechteckes $ab_1c_1d_1$; die eine Seite desselben ist $ab_1 = dv$; und die andere Seite ad_1 stellt die Abnahme des Druckes dar, wenn die Temperatur des Körpers bei constantem Volumen um dt sinkt. Setzen wir $ad_1 = dp$, so folgt, weil v constant, also $dv = o$ ist, aus Gleichung (14):

Fig. 3.



$$dp = \frac{dt}{\left(\frac{dt}{dp}\right)},$$

und sonach der Inhalt des Parallelogramms:

$$dv\,dp = \frac{dv\,dt}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}. \tag{18}$$

Setzt man nun diesen Werth statt dF und den Werth von dQ nach Gleichung (17) statt Q in die Gleichung (16) so folgt nach einfacher Reduction:

$$\frac{\frac{AT}{dT}}{dt} = Y\left(\frac{dt}{dp}\right) - X\left(\frac{dt}{dv}\right). \tag{III}$$

Das ist die zweite Hauptgleichung der mechanischen Wärmetheorie, wie sie, wenn auch in ganz anderer Form, von *Clausius* gegeben wurde.

§ 12.

Diese Gleichung soll zunächst in einfacherer Form geschrieben werden; nach dem Vorstehenden ist die linke Seite nur eine Function von t und A das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit, also eine Constante. Wir setzen nun bis auf Weiteres:

$$\frac{\frac{AT}{dT}}{dt} = C. \tag{19}$$

Diese noch näher zu bestimmende Temperaturfunction C ist die gleiche, welche unter derselben Bezeichnung schon in der Arbeit von *Clapeyron* vorkommt und die man nach dem Vorgange dieses Schriftstellers seither mit dem Namen der „*Carnot*'schen Function" allgemein in der mechanischen Wärmetheorie bezeichnet. Sie ist, wie aus dem Gange der Betrachtungen hervorgeht, ebenso wie T, eine für alle Körper gleiche Temperaturfunction.

Sobald eine der beiden Temperaturfunctionen T oder C bekannt ist, ist nach Gleichung (19) auch sofort die andere bestimmt. Die wahre Bedeutung beider Functionen wird sich später ergeben.

Nach Einführung dieser neuen Bezeichnung schreibt sich dann Gleichung (III) einfacher:

$$\mathbf{C} = \mathbf{Y}\left(\frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{dp}}\right) - \mathbf{X}\left(\frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{dv}}\right)^{*)}. \tag{IIIa}$$

---

*) Es verdient hervorgehoben zu werden, dass schon *Clapeyron* diese Gleichung genau in derselben Form giebt („Poggendorff's An-

Diese Gleichung in Verbindung mit der früher entwickelten ersten Hauptgleichung, nämlich:

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{dY}}{\mathbf{dp}} - \frac{\mathbf{dX}}{\mathbf{dv}}, \tag{II}$$

und die Gleichung, welche die einem Körper zuzuführende Wärme dQ giebt, wenn sein Volumen um dv und sein Druck um dp wachsen soll, nämlich:

$$\mathbf{dQ} = \mathbf{X\,dp} + \mathbf{Y\,dv} \tag{I}$$

bilden nun die Grundlagen aller weiteren Untersuchungen.

Die Verbindungen vorstehender Gleichungen führt noch auf eine Reihe anderer, von denen wir die folgenden beiden mit Vortheil benutzen werden.

Bestimmen wir das eine Mal Y, das andere Mal X aus Gleichung (IIIa) und setzen die Werthe in Gleichung (I), so folgt unter Berücksichtigung, dass

$$dt = \left(\frac{dt}{dp}\right) dp + \left(\frac{dt}{dv}\right) dv$$

ist, nach einigen leicht zu übersehenden Reductionen:

$$\mathbf{dQ} = \frac{\mathbf{X\,dt} + \mathbf{C\,dv}}{\left(\frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{dp}}\right)} \tag{Ia}$$

und

$$\mathbf{dQ} = \frac{\mathbf{Y\,dt} - \mathbf{C\,dp}}{\left(\frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{dv}}\right)}. \tag{Ib}$$

---

nalen". Bd. 59, S. 574). Die Bedeutung der *Clapeyron*'schen Gleichung ist aber wesentlich verschieden von der unsrigen.

Clapeyron legte nämlich seinen Untersuchungen den *Carnot*'schen Satz zu Grunde mit Einschluss des zweiten Theiles desselben, den wir oben nach dem Vorgange von *Clausius* als unrichtig verworfen haben. Daher findet *Clapeyron*, dass $dQ = Xdp + Ydv$ ein vollständiges Differential sei, also der Bedingung $\frac{dX}{dv} = \frac{dY}{dp}$ genüge; er setzt daher $X = \left(\frac{dQ}{dp}\right)$ und $Y = \left(\frac{dQ}{dv}\right)$ und sucht selbst unter dieser Voraussetzung Gleichung IIIa zu integriren (siehe den Zusatz seines Aufsatzes).

Diese beiden Gleichungen sind natürlich mit Gleichung (I) identisch und sind ebenso, wie diese, wie wir das oben ausführlich entwickelt haben, nicht integrabel, selbst wenn die Form der Functionen X, Y, C und $t = f(v, p)$ bekannt wäre, so lange nicht aus irgend anderen Angaben erkannt werden kann, nach welchem Gesetze sich während der Wärmezuführung der Druck p mit den Volumen ändert.

In ähnlicher Weise lassen sich auch drei Gleichungen für die Zunahme dU der inneren Wärme, d. h. der im Körper enthaltenen Wärme aufstellen; da aber nach früheren Sätzen (Gleichung 4):

$$\mathbf{dU = dQ - Apdv}$$

ist und wir gewöhnlich diese Gleichung in Anwendung bringen werden, so sollen weitere Umformungen nicht vorgenommen werden, um so mehr, als dieselben durchaus keinen Schwierigkeiten unterliegen.

Auf zwei merkwürdige Ausdrücke gelangt man, wenn man Gleichung (III a) nach p oder nach v differentiirt und die Resultate mit Gleichung (II) verbindet; da diese Ausdrücke aber für das Folgende nicht erforderlich sind und es mir nicht gelungen ist, aus denselben besondere neue Beziehungen abzuleiten, so sollen auch diese Umformungen hier unterlassen werden.

In den folgenden Capiteln werden die Hauptresultate des Vorstehenden ihre praktische Anwendung finden.

Capitel II.

Von den permanenten Gasen.

§ 13.

Der Hauptrepräsentant der permanenten Gase, d. h. derjenigen Gase, die unter allen Umständen luftförmig bleiben, und sonach bis jetzt weder durch Volumenveränderung, noch durch Abkühlung in den flüssigen oder festen Zustand übergeführt werden konnten, ist die „atmosphärische Luft". Da dieses Gas wohl nur allein im erwärmten Zustande als Motor eine technische Wichtigkeit erlangen kann, und dann mit ihm auch die zuverlässigsten Versuche angestellt worden sind, so soll im Folgenden meist nur auf diese Gasart Rücksicht genommen werden.

Die permanenten Gase sind bis jetzt unter allen Körpern diejenigen, für welche allein die Beziehung zwischen Temperatur, Druck und Volumen, also die Form der Function

$$t = F(v, p)$$

bekannt ist und zwar durch das Gesetz, das den Namen: „*Mariotte* und *Gay-Lussac*'sches Gesetz" trägt.

Man stellt dieses Gesetz in den Lehrbüchern der Physik und Mechanik gewöhnlich durch folgende Gleichung dar:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{p_0}{p} \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_0}, \tag{20}$$

wo v und v_0 die Volumina einer gewissen Gasmenge und p und p_0 die Drücke derselben bei den Temperaturen t und t_0 darstellen, und wo ferner α den Ausdehnungscoefficienten

bedeutet, der bekanntlich für Luft nach den Versuchen von *Regnault* und *Magnus* zu 0,003665 anzunehmen ist.

Wir werden auch ferner, wie früher unter v und v_0, stets das Volumen der Gewichtseinheit (1 Kilogramm) des Gases verstehen und obige Formel in einfacherer Gestalt anwenden.

Aus Gleichung (20) folgt nämlich:

$$\frac{v}{v_0} = \frac{p_0}{p} \frac{\frac{1}{\alpha} + t}{\frac{1}{\alpha} + t_0},$$

oder wenn wir zugleich $\frac{1}{\alpha} = a$ setzen:

$$\frac{vp}{a + t} = \frac{v_0 p_0}{a + t_0}. \qquad (21)$$

Aus der letzten Gleichung erkennt man zunächst, dass der Werth

$$\frac{vp}{a + t}$$

für jedes bestimmte Gas eine constante Grösse ist, die sich sofort aus den bekannten Versuchsresultaten berechnen lässt, und die wir in der Folge mit R bezeichnen werden, so dass also aus Gleichung (21) einfach folgt:

$$vp = R(a + t). \qquad (22)$$

Diese Gleichung, die natürlich mit Gleichung (20) identisch, aber für den Gebrauch einfacher ist, giebt sonach die für permanente Gase anzunehmende Beziehung zwischen Volumen v, Spannung p und Temperatur t.

Der Werth von a ist nach Obigem $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0{,}003665}$, oder genau genug $a = 273$ zu setzen, hiernach bedeutet

$$a + t = 273 + t$$

nichts Anderes, als die Temperatur des Gases von einem Punkte der Thermometerscala aus gezählt, der um 273° unter dem Gefrierpunkte liegt; man nennt diesen Punkt den absoluten Nullpunkt und $a + t$ die absolute Temperatur und sonach sagt Gleichung (22), dass bei permanenten Gasen

das Product aus Volumen und Druck der absoluten Temperatur proportional ist.

Da v das Volumen der Gewichtseinheit ist, so folgt umgekehrt für das Gewicht der Volumeneinheit (1 Cubikmeter) der Werth $\frac{1}{v}$. Für die Temperatur $t = 0^0$ und für die Spannung von einer Atmosphäre, d. h. für $p = 10334$ Kilogramme (Druck auf ein Quadratmeter), fand *Regnault* für atmosphärische Luft:

$$\frac{1}{v} = 1{,}2932 \text{ Kilogramme.}$$

Diese Werthe in Gleichung (22) gesetzt, giebt dann für atmosphärische Luft die Constante:

$$R = 29{,}272.$$

Die Differentiation derselben Gleichung in Hinsicht p und v giebt:

$$\left(\frac{dt}{dp}\right) = \frac{v}{R} \tag{23}$$

und

$$\left(\frac{dt}{dv}\right) = \frac{p}{R}. \tag{24}$$

Es verdient allerdings hervorgehoben zu werden, dass das *Mariotte* und *Gay-Lussac*'sche Gesetz nach *Regnault's* Versuchen nicht genau richtig ist, dass also die Gleichungen (22), (23) und (24) nicht streng das Verhalten der permanenten Gase darstellen. Die Abweichungen sind aber so gering, dass man das Gesetz wenigstens vorläufig unbedenklich als vollkommen, besonders für atmosphärische Luft, ansehen kann.

§ 14.

Die Gleichung (Ia) (Capitel I) nun, nämlich:

$$dQ = \frac{X dt + C dv}{\left(\frac{dt}{dp}\right)} \tag{Ia}$$

drückt nach Früherem die Wärmemenge aus, welche der Gewichtseinheit eines Körpers zugeführt werden muss, wenn

seine Temperatur um dt und sein Volumen um dv wachsen soll, wobei X·eine noch unbekannte Function von v und p und C die *Carnot*'sche Temperaturfunction bedeutete.

Wendet man diese Formel auf ein Gas an, und denkt man sich, es werde demselben bei constantem Volumen Wärme zugeführt, so ist $dv = 0$ und daher die zuzuführende Wärmemenge nach Ia:

$$dQ = \frac{X}{\left(\frac{dt}{dp}\right)} \cdot dt,$$

oder unter Benutzung der Gleichung (23):

$$dQ = \frac{XR}{v} dt. \qquad (25)$$

Ist nun c_1 die specifische Wärme des Gases bei constantem Volumen (wobei vorläufig dahin gestellt sein mag, ob c_1 constant, oder eine Function der Temperatur ist), so findet sich die Wärmemenge, welche erforderlich ist, die Temperatur um dt zu erhöhen, auch:

$$dQ = c_1\, dt$$

und diese Gleichung muss mit Gleichung (25) identisch sein, wir erhalten daher durch Gleichsetzen:

$$c_1 = \frac{XR}{v}$$

und daraus:

$$X = \frac{c_1 v}{R}. \qquad (26)$$

Die Gleichung (Ib) nämlich:

$$dQ = \frac{Y dt - C dp}{\left(\frac{dt}{dv}\right)}, \qquad \text{(Ib)}$$

ergab ferner die Wärmemenge, die der Gewichtseinheit eines Körpers zuzuführen ist, wenn die Temperatur um dt und der Druck um dp erhöht werden soll. Sorgt man aber dafür, dass während der Wärmezuführung der Druck p constant bleibt, so ist $dp = 0$ und sonach für diesen Fall die zuzuführende Wärmemenge:

$$dQ = \frac{Y}{\left(\frac{dt}{dv}\right)} dt.$$

Denkt man sich wieder, der zu erwärmende Körper sei ein Gas, so schreibt sich die letzte Gleichung unter Benutzung von Gleichung (24):

$$dQ = \frac{YR}{p} dt, \tag{27}$$

welche letztere Gleichung aber gewöhnlich in folgender Form gegeben wird:

$$dQ = c\,dt,$$

wobei man unter c die specifische Wärme des Gases bei constantem Drucke versteht.

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$c = \frac{YR}{p}$$

und sonach:

$$Y = \frac{cp}{R}. \tag{28}$$

Die Gleichungen (Ia) und (Ib) sind aber früher nur aus der Umformung der Gleichung (I) nämlich

$$dQ = X dp + Y dv \tag{I}$$

hervorgegangen, der Gleichung, welche die Wärmemenge giebt, die man der Gewichtseinheit eines Körpers zuführen muss, wenn das Volumen um dv, der Druck um dp wachsen soll.

Für die permanenten Gase haben wir aber so eben die Bedeutung von X und Y erkannt, substituiren wir die erhaltenen Werthe, so erhalten wir für Gase folgende Gleichung:

$$dQ = \frac{1}{R}(c_1 v\,dp + cp\,dv). \tag{29}$$

Diese letzte Gleichung ist von grosser Wichtigkeit und wird uns die Mittel an die Hand geben, das Verhalten der Gase unter den verschiedensten Verhältnissen zu erkennen.

Ehe jedoch auf specielle Fälle eingegangen werden kann, müssen zunächst noch einige andere Bestimmungen getroffen werden.

§ 15.

Die specifische Wärme bei constantem Drucke, c, ist von *Regnault* für verschiedene Gase bestimmt. *Regnault* fand für atmosphärische Luft

$$c = 0{,}2377$$

und erhielt ausserdem das wichtige Resultat, dass der Werth c constant ist, eine Bestätigung der schon früher von *Clausius* ausgesprochenen Ansicht.

Die specifische Wärme der Gase bei constantem Volumen, also c_1, ist bis jetzt noch nicht direct bestimmt worden, sondern es ist nur auf verschiedenen Wegen, die hier nicht weiter erörtert werden sollen, gelungen, das Verhältniss $\frac{c}{c_1}$ der beiden specifischen Wärmen, das wir künftig mit $\varkappa$ bezeichnen werden, zu bestimmen.

So ergab sich für atmosphärische Luft aus den Versuchen von:

Clément und *Désormes* $\varkappa =$	1,348
Masson	1,419
Dulong	1,421
*Weisbach**)	1,4025
und aus der Formel für die Schallgeschwindigkeit folgt:	1,4122.

Als der wahrscheinlichste Werth ist bis auf Weiteres

$$\varkappa = \frac{c}{c_1} = 1{,}41$$

zu setzen, und dann ergiebt sich unter Zugrundelegung des *Regnault*'schen Werthes von c, für die Luft die specifische Wärme bei constantem Volumen:

$$c_1 = 0{,}1687.$$

Ob dieser Werth ebenfalls constant ist, lässt sich nicht ohne Weiteres behaupten, es ist aber im höchsten Grade wahrscheinlich, denn die Resultate, welche die mechanische

---

*) „Civilingenieur". Bd. V, S. 46.

Wärmetheorie unter Annahme der Unveränderlichkeit des Werthes von c_1 ergiebt, stimmen, wie sogleich gezeigt werden wird, sehr gut mit hierher gehörigen Versuchsresultaten. Nehmen wir sonach c sowohl als c_1 constant an, so folgt aus den Gleichungen (26) und (28) durch Differentiation:

$$\frac{dX}{dv} = \frac{c_1}{R} \quad \text{und} \quad \frac{dY}{dp} = \frac{c}{R},$$

und daher nach der ersten Hauptgleichung der mechanischen Wärmetheorie, nämlich:

$$A = \frac{dY}{dp} - \frac{dX}{dv}, \tag{II}$$

sofort

$$A = \frac{c - c_1}{R}, \tag{30}$$

als das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit, und umgekehrt ergiebt sich daraus für das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit, oder das sogenannte mechanische Wärmeäquivalent:

$$\frac{1}{A} = \frac{R}{c - c_1}. \tag{31}$$

Setzen wir hierin rechts die oben für atmosphärische Luft gegebenen Werthe ein, so folgt:

$$\frac{1}{A} = 424 \text{ Meterkilogrammen},$$

ein Werth, dessen Bedeutung wir schon in Capitel I, § 4, angegeben haben, und der seiner Grösse nach mit den hierüber angestellten Versuchen sehr gut übereinstimmt.

Person („Comptes rendues". T. 39) findet genau diesen Werth, und die von *Joule* auf sehr verschiedene Weise ausgeführten Versuche geben im Mittel den Werth 423,55. Die Versuche von *Hirn* u. A. führten auf Resultate, die nur wenig von den gegebenen abweichen, so dass man in diesen Resultaten eine schöne Bestätigung der Richtigkeit der den obigen Formeln zu Grunde liegenden Ansichten erkennen muss.

Bei allen weiteren Untersuchungen werden wir für $\frac{1}{A}$ den aus Gleichung (31) gewonnenen Werth zu Grunde legen.

Mit Hülfe der im Vorstehenden gefundenen Ergebnisse lässt sich nun endlich die *Carnot*'sche Temperaturfunction C näher bestimmen.

Nach der zweiten Hauptgleichung der mechanischen Wärmetheorie war:

$$C = Y\left(\frac{dt}{dp}\right) - X\left(\frac{dt}{dv}\right).$$

Substituiren wir hier rechts die in den Gleichungen (23), (24), (26) und (28) gegebenen Werthe, so folgt:

$$C = \frac{cp}{R} \cdot \frac{v}{R} - \frac{c_1 v}{R} \cdot \frac{p}{R},$$

oder

$$C = \frac{c - c_1}{R} \cdot \frac{pv}{R}.$$

Nun war aber nach Gleichung (30):

$$\frac{c - c_1}{R} = A$$

und nach Gleichung (22):

$$\frac{pv}{R} = a + t,$$ sonach ist:

$$\mathbf{C = A\,(a + t),} \tag{32}$$

und diese merkwürdig einfache Deutung der *Carnot*'schen Function wurde zuerst durch diesen Ausdruck von *Clausius* gegeben*).

Wir haben früher in Capitel I angegeben, dass, wenn die Function C bekannt sei, daraus auch sofort die Temperaturfunction sich ergebe, die wir dort mit T bezeichnet haben; es war nämlich nach Gleichung (19), S. 30:

$$C = \frac{AT}{\frac{dT}{dt}};$$

---

*) Dass die *Carnot*'sche Function eine der Gleichung (32) ähnliche Form habe, fand schon *Holtzmann* (a. a. O.) ohne allerdings speciell darauf hinzuweisen; bestimmter aber sprach sich *Helmholtz* auf Grund der Vergleichung der von *Clapeyron* und *Holtzmann* gegebenen Formeln darüber aus. S. *Helmholtz*. „Ueber die Erhaltung der Kraft". S. 37. Berlin 1847.

wenn wir nun in diese Gleichung obigen Werth von C einsetzen, so folgt:

$$\frac{dt}{a+t}=\frac{dT}{T}$$

und daraus durch Integration:

$$T=a+t. \tag{33}$$

Sonach bedeutet in den allgemeinen Gleichungen, wie sie in Capitel I gegeben wurden, T nichts anderes, als die absolute Temperatur und die *Carnot*'sche Function steht sonach zu dieser in der Beziehung:

$$C=A\,.\,T. \tag{34}$$

Die letzteren Ergebnisse sind für die mechanische Wärmetheorie von hoher Wichtigkeit, denn die beiden Functionen C und T sind, wie wir das nochmals hervorheben wollen, Temperaturfunctionen, die für alle Körper die gleichen sind.*)

---

*) Anmerkung 1. Die vorstehenden Resulate sind aus der Annahme hervorgegangen, dass die permanenten Gase dem *Mariotte Gay-Lussac*'schen Gesetze folgen und dass die specifische Wärme für constanten Druck und die für constantes Volumen constante Grössen sind.

Wollte man nur die erstere Annahme gelten lassen und allgemein annehmen, dass c sowohl als c_1 Functionen der Temperatur wären, so liesse sich, wie ich sofort zeigen werde, die Form dieser Functionen näher bestimmen.

Wir fanden oben:

$$X=\frac{c_1 v}{R} \text{ und } Y=\frac{cp}{R}.$$

Die erstere Gleichung in Hinsicht v, die andere in Hinsicht p unter der Voraussetzung differentiirt, dass c und c_1 Functionen von t sind, giebt:

$$\frac{dX}{dv}=\frac{c_1}{R}+\frac{v}{R}\left(\frac{dc_1}{dv}\right)=\frac{c_1}{R}+\frac{v}{R}\frac{dc_1}{dt}\left(\frac{dt}{dv}\right) \quad \text{und}$$

$$\frac{dY}{dp}=\frac{c}{R}+\frac{p}{R}\left(\frac{dc}{dp}\right)=\frac{c}{R}+\frac{p}{R}\frac{dc}{dt}\left(\frac{dt}{dp}\right).$$

Substituirt man die bekannten Werthe von $\left(\frac{dt}{dv}\right)$ und $\left(\frac{dt}{dp}\right)$ und beachtet, dass

$$\frac{vp}{R}=a+t$$

§ 16.

Die so eben bestimmten Werthe von C und T könnten wir nun in die für alle Körper geltenden Hauptgleichungen der Wärmetheorie, wie sie in Capitel I gegeben wurden, einsetzen; da wir es aber hier zunächst nur mit den permanenten Gasen zu thun haben, so sollen die Gleichungen sogleich mit Rücksicht auf diese umgeformt werden.

Wir denken uns, dass der Gewichtseinheit des permanenten Gases Wärme zugeführt werde, und dass dabei das Volumen v um dv, die Temperatur t um dt und die Spannung p um dp wachse; die Gleichungen (I), (Ia) und (Ib) geben dann, wenn wir die Werthe von X, Y, C, $\left(\frac{dt}{dp}\right)$

---

ist, so giebt die erste Hauptgleichung:

$$A = \frac{dY}{dp} - \frac{dX}{dv}$$

unter Benutzung vorstehender Gleichungen:

$$A = \frac{c - c_1}{R} + \frac{a + t}{R} \frac{d(c - c_1)}{dt}, \qquad \text{oder}$$

$$ARdt = (c_1 - c_1)\,dt + (a + t)\,d(c - c_1) = d\left[(a + t)(c - c_1)\right]$$

und daraus folgt durch Integration und eine leicht zu übersehende Umformung:

$$c - c_1 = AR + \frac{nR}{a + t} \qquad (\alpha)$$

worin n eine, sowohl ihrer Grösse als ihrem Vorzeichen nach, noch näher zu bestimmende Constante wäre.

Ist, wie *Regnault* gefunden hat, der Werth c constant, dann wäre nach Gleichung (α)

$$c_1 = c - AR - \frac{nR}{a + t}, \qquad (\beta)$$

also c_1 eine sehr einfache Function der Temperatur.

Will man vorübergehend diese Resultate gelten lassen, und verbindet sie mit der zweiten Hauptgleichung (IIIa), so würde sich für die *Carnot*'sche Function der Werth:

$$C = A(a + t) + n \qquad (\gamma)$$

ergeben, ein Werth, der sich von dem im Text gegebenen nur durch das constante Glied n unterscheidet.

und $\left(\frac{dt}{dv}\right)$ benutzen, wie sie durch vorstehende Betrachtungen gefunden wurden, nach einigen leichten Umformungen:

$$dQ = \frac{1}{R}(c_1 v\,dp + cp\,dv), \tag{35}$$

$$dQ = c_1\,dt + \frac{AR(a+t)}{v}dv, \tag{36}$$

$$dQ = c\,dt - \frac{AR(a+t)}{p}dp. \tag{37}$$

Diese drei Gleichungen, von denen die erste schon früher gegeben wurde, sind identisch; bei der Lösung bestimmter Aufgaben benutzen wir davon diejenige, die am schnellsten zum Ziele führt.

Gleichung (γ) schreibt sich auch

$$C = A\left(a + \frac{n}{A} + t\right),$$

oder wenn wir:
$$a + \frac{n}{A} = a'$$
setzen:
$$C = A(a' + t),$$

wo der Werth a' sofort bestimmt ist, sobald das mit n der Fall ist. Man erkennt sonach, dass vorstehende Annahmen nichts an der Form der *Carnot*'schen Function ändern würden, sondern es würde nur folgen, dass $a' + t$ nicht das bedeutet, was wir oben die absolute Temperatur genannt haben.

Obgleich vorstehende Entwickelungen allgemeiner, als die des Textes sind, da wir hier nur den ganzen Betrachtungen das *Mariotte* und *Gay-Lussac*'sche Gesetz zu Grunde legten, so müssen wir doch aus verschiedenen Gründen annehmen, dass ausser c auch c_1 eine constante Grösse ist, dass also in vorstehenden Formeln $n = 0$ und sonach $a' = a$ ist, wodurch sich sofort wieder die Gleichungen des Textes ergeben. Diese Gründe bestehen einestheils darin, dass die Gleichungen des Textes, besonders Gleichung (31) sehr gut mit Versuchsresultaten stimmen, anderentheils darin, dass uns die weiteren Entwickelungen in Betreff der inneren Beschaffenheit der Gase zu Schlüssen führen, gegen die sich keine erheblichen Einwürfe machen lassen. Ueberdies ist hervorzuheben, dass auch die vorstehende Entwickelung auf einer Annahme beruht, die nicht streng richtig ist, nämlich, dass die Gase genau dem *Mariotte* und *Gay-Lussac*'schen Gesetze folgen.

Wie schon aus früheren Bemerkungen hervorgeht und wie ein Blick auf vorstehende Gleichungen jetzt deutlich zeigt, lässt sich keine derselben integriren, so lange nicht noch eine besondere Beziehung einzelner Grössen derselben gegeben ist; ferner geben diese Gleichungen die von aussen zuzuführende Wärme; diese Wärme theilt sich dann, wie die schon früher gegebene Gleichung

$$dQ = dU + Apdv \qquad (38)$$

zeigt, in zwei Theile, wo dU den Theil der zugeführten Wärme bedeutet, der zur Erhöhung der inneren Wärme U und wo $Apdv$ der Theil ist, der zu äusserer Arbeit verbraucht wird.*)

Endlich ist auch noch speciell hervorzuheben, dass die obigen drei Gleichungen auch nur dann in Gebrauch kommen dürfen, wenn von aussen gegen das Gas ein Druck ausgeübt wird, der seiner Spannung fortwährend gleich ist, denn nur unter dieser Voraussetzung gelten die allgemeinen Gleichungen in Capitel I.

Die vorstehenden Ausdrücke führen sofort auf ein Gesetz, das ein helles Licht auf das allgemeine Verhalten der Gase wirft.

Aus Gleichung (22) ergiebt sich nämlich:

$$\frac{R(a+t)}{v} = p$$

und setzt man das in Gleichung (36), so folgt für alle Fälle

$$dQ = c_1\, dt + Apdv. \qquad (39)$$

Vergleichen wir nun diese Formel mit Gleichung (38), so folgt:

---

*) Anmerkung 2. Genau dieselben Gleichungen, wie Nr. 35 bis 37, würden sich auch ergeben, wenn wir dieselbe Annahme, wie in Anmerkung 1 machen, nämlich:

$$c - c_1 = AR + \frac{nR}{a+t}$$

setzen wollten. Gleichung (35) bliebe der Form nach ungeändert und in den Gleichungen (36) und (37) würde a' statt a erscheinen, wo a' die dort gegebene Bedeutung hat.

$$dU = c_1\,dt, \tag{40}$$

wo also c_1 die specifische Wärme bei constantem Volumen ist.

„Welches daher auch die Veränderungen seien, die wir mit einem Gase vornehmen; mag das Gas nach beliebigen Gesetzen ausgedehnt oder comprimirt, erwärmt oder abgekühlt worden sein, die Zunahme oder Abnahme der **inneren Wärme** ist immer bestimmt, wenn nur die Temperaturen am Anfang und Ende der Operationen gegeben sind; ist sonach t_1 die Anfangs- und t_2 die Endtemperatur, so ist, wie sich durch Integration der Gleichung (40) ergiebt, die Veränderung der im Gase enthaltenen Wärme: $c_1(t_2 - t_1)$.

Und ebenso muss man aus derselben Gleichung schliessen, dass die ganze im Gase enthaltene Wärme, also die innere Wärme der Gewichtseinheit Gas ist:

$$U = c_1(a + t), \tag{41}$$

da doch anzunehmen ist, dass im absoluten Nullpunkte, d. h. bei der Temperatur $t = -a = -273$, die innere Wärme Null ist.

Ueberdies schreibt sich auch nach Gleichung (40) die specifische Wärme bei constantem Volumen:

$$c_1 = \frac{dU}{dt}. \tag{42}$$

Die von aussen zuzuführende Wärme ergiebt sich aber durch Integration der Gleichung (39):

$$Q = c_1(t_2 - t_1) + A\int_{v_1}^{v_2} p\,dv. \tag{43}$$

Von den unendlich vielen Fällen, in denen die Integration des zweiten Gliedes dieser Gleichung möglich ist, sollen nun im Folgenden die wichtigsten behandelt werden.

§ 17.

Erwärmung des Gases bei constantem Volumen.

Sei v das Volumen der Gewichtseinheit, t_1 die Anfangs- und t_2 die Endtemperatur, so ist, weil das Volumen constant bleiben soll, $dv = 0$, und daher nach Gleichung (43) die zuzuführende Wärme:

$$Q = c_1 (t_2 - t_1), \tag{44}$$

wie wir auch ohne Weiteres hätten anschreiben können.

Gleichung (38) giebt ferner für diesen Fall:

$$dQ = dU,$$

und daher ist auch, wenn U_1 die innere Wärme anfangs, U_2 die am Ende ist:

$$Q = U_2 - U_1,$$

d. h. die zugeführte Wärme ist nur zu Erhöhung der inneren Wärme verwandt worden.

Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, dass das Wort Erwärmung hier und in der Folge auch im negativen Sinne, d. h. als Abkühlung gebraucht wird, im vorstehenden Falle, würde also, wenn $t_2 < t_1$ wäre, $Q = U_2 - U_1$ negativ, was andeutet, dass dem Gase bei constantem Volumen die Wärmemenge

$$Q = U_2 - U_1 = c_1 (t_2 - t_1)$$

entzogen wurde.

Erwärmung des Gases bei constantem Drucke.

Es sei p die Spannung des Gases, das Volumen am Anfange v_1, am Ende v_2, und die Temperaturen seien resp. t_1 und t_2. Da p constant ist, so folgt $dp = 0$, und daher nach Gleichung (37):

$$dQ = c\,dt$$

und daraus durch Integration und wegen der angegebenen Bezeichnung:

$$Q = c (t_2 - t_1), \tag{45}$$

eine Gleichung, die man sofort hätte anschreiben können, wegen der Bedeutung von c.

Nach Gleichung (43) findet sich die zuzuführende Wärmemenge aber auch, weil man dort jetzt das zweite Glied integriren kann:

$$Q = c_1 (t_2 - t_1) + Ap (v_2 - v_1). \qquad (46)$$

Das erste Glied giebt wieder die Zunahme der im Gase enthaltenen, und das zweite Glied giebt die in Arbeit verwandelte Wärmemenge. Durch Gleichsetzen von (45) und (46) folgt überdies:

$$Ap (v_2 - v_1) = (c - c_1)(t_2 - t_1),$$

als die zu Arbeit verbrauchte Wärme; die Arbeit selbst ist:

$$p (v_2 - v_1) = \frac{c - c_1}{A} (t_2 - t_1),$$

oder nach Gleichung (30):

$$p (v_2 - v_1) = R (t_2 - t_1). \qquad (47)$$

Man sieht hieraus zugleich, dass im vorliegenden Falle die Spannung p und das Anfangs- und Endvolumen des Gases nicht bekannt zu sein braucht, um die vom Gase verrichtete Arbeit zu berechnen, sondern dass dazu die Anfangs- und Endtemperatur ebenfalls genügt.

Nehme ich z. B. an, in einem Cylinder befindet sich 1 Kilogramm atmosphärische Luft von der Temperatur $t_1 = 100^0$ und ich erwärme das Gas, während es mit constantem Drucke einen Kolben vorwärts schiebt, auf $t_2 = 200^0$, so ist die ganze zuzuführende Wärme:

$$Q = c (t_2 - t_1) = 0{,}2377\ (200 - 100) = 23{,}77 \text{ Calorien.}$$

Ferner die Wärme, welche davon das Gas in sich aufnimmt:

$$U_2 - U_1 = c_1 (t_2 - t_1) = 0{,}1687\ (200 - 100) = 16{,}87 \text{ Calorien.}$$

Ferner die in Arbeit verwandelte Wärme:

$$Ap (v_2 - v_1) = (c - c_1)(t_2 - t_1) = 0{,}0690\ (200 - 100) = 6{,}90 \text{ Calorien.}$$

Und endlich die vom Gase verrichtete äussere Arbeit:

$$p (v_2 - v_1) = R (t_2 - t_1) = 29{,}272\ (200 - 100) = 2927{,}2 \text{ Meterkilogr.}$$

Hätte ich umgekehrt dieses Gas von 200^0 Temperatur bei constantem Drucke comprimirt, so musste es ab-

gekühlt werden; fand die Compression so weit statt, dass die Temperatur des Gases am Schlusse 100° betrug, so war die Compressionsarbeit 2927,2 Meterkilogr., die ganze abzuführende Wärme 23,77 Calorien; die vom Gase abgegebene Wärme 16,87 Calorien und die aus der Arbeit entstandene 6,90 Calorien.

Erwärmung und Volumenveränderung des Gases bei constanter Temperatur.

Soll die Temperatur der Gewichtseinheit Gas während seiner Volumenveränderung constant bleiben, so ist $dt = 0$, und sonach bei der Ausdehnung die zuzuführende Wärmemenge nach Gleichung (39):

$$dQ = Apdv$$

und nach Gleichung (36):

$$dQ = AR(a+t)\,\frac{dv}{v} \qquad (48)$$

und der Vergleich mit Gleichung (38) ergiebt:

$$dU = 0.$$

Die erste und letzte dieser drei Gleichungen zeigt, dass die im Gase enthaltene Wärme unverändert bleibt, also die ganze zugeführte Wärme in äussere Arbeit verwandelt wird, wenn die Ausdehnung des Gases bei constanter Temperatur geschieht.

Dieses Resultat ist nach der Vorstellung, die wir uns von der inneren Beschaffenheit der Gase machen müssen, so einleuchtend, dass das ein Grund mehr ist, die Richtigkeit der Voraussetzungen, dass neben der specifischen Wärme bei constantem Drucke auch die bei constantem Volumen eine constante Grösse ist, anzunehmen. *Clausius* („Poggendorff's Annalen". Bd. 79) geht von diesem Satze aus und kommt so rückwärts zu dem Schlusse, dass c und c_1 constant sind, was wenigstens in Hinsicht c die Versuche von *Regnault* bestätigten. Bei condensirbaren Gasen gilt aber der im Vorstehenden gefundene Satz nicht mehr, wie schon daraus hervorgehen muss, dass diese auch dem *Mariotte*

und *Gay-Lussac*'schen Gesetze nicht folgen. Da t constant ist, so lässt sich jetzt nach Gleichung (48) die zuzuführende Wärme bestimmen, wenn das Volumen v_1 auf das Volumen v_2 gebracht wird, und zwar folgt:

$$Q = AR(a + t) \, logn. \frac{v_2}{v_1}. \tag{49}$$

Ist die Spannung im Anfange p_1, am Ende p_2, so ist auch:

$$p_1 v_1 = p_2 v_2 = R(a + t),$$

also nach Gleichung (49) ebenso

$$Q = A p_1 v_1 \, logn. \frac{v_2}{v^1} = A p_2 v_2 \, logn. \frac{v_2}{v_1}. \tag{50}$$

Da nun diese ganze Wärme eben in Arbeit verwandelt wird, so folgt auch, wenn wir diese äussere Arbeit durch F bezeichnen:

$$Q = AF,$$

also:

$$F = p_1 v_1 \, logn. \frac{v_2}{v_1} = p_2 v_2 \, logn. \frac{v_2}{v_1}. \tag{51}$$

Eine Gleichung, die schon längst bekannt ist, und die schon direct aus dem *Mariotte*'schen Gesetze folgt.

Sollte umgekehrt das Gas vom Volumen v_2 auf das Volumen v_1 bei constanter Temperatur comprimirt werden, so giebt Gleichung (51) die aufzuwendende Arbeit und Gleichung (50) die während des Prozesses dem Gase zu entziehende Wärme. Die innere Wärme ist nach wie vor dieselbe.*)

---

*) Anmerkung 3. Würden wir wieder nach Anmerkung 1 auf Grund der *Regnault*'schen Versuche c constant, für c_1 aber die dort gegebene Temperaturfunction nehmen, so würde nach Anmerkung 2 für den Fall der Gleichung (48) folgen:

$$dQ = AR(a' + t) \frac{dv}{v},$$

oder vermöge der Bedeutung von a' nach Anmerkung 1:

$$dQ = AR(a + t) \frac{dv}{v} + nR \frac{dv}{v} = A p \, dv + nR \frac{dv}{v}$$

und das würde heissen, wenn n positiv wäre, dass bei Ausdehnung unter constanter Temperatur nicht alle zugeführte Wärme in äussere Arbeit verwandelt, sondern ein Theil davon zu Erhöhung der inneren Wärme verbraucht wird. Die Integration der letzten Gleichung würde geben:

§ 18.

Verhalten des Gases, wenn es bei seiner Volumenveränderung einem äusseren Drucke ausgesetzt ist, der dem Drucke des Gases in jedem Momente gleich ist und wenn dabei weder Wärme zu- noch abgeführt wird.

Wir stellen uns vor, die Gewichtseinheit eines Gases befinde sich in einem für Wärme undurchdringlichen Cylinder und fragen nach dem Verhalten des Gases, wenn es sich ausdehnt, also durch Zurückschieben des Kolbens Arbeit verrichtet, oder wenn es comprimirt wird. Da Wärme weder zu noch abgeführt werden soll, so ist sowohl Q als dQ Null und daher folgt nach Gleichung (35):

$$0 = \frac{1}{R}(c_1 v dp + c p dv), \qquad \text{oder}$$

$$0 = v dp + \frac{c}{c_1} p dv.$$

Nennen wir das Verhältniss der beiden Wärmecapacitäten $\varkappa$ und dividiren die letzte Gleichung durch pv, so folgt auch

$$0 = \frac{dp}{p} + \varkappa \cdot \frac{dv}{v},$$

und daraus durch Integration, wenn v_1 und p_1 Volumen und Spannung im Anfange, v_2 und p_2 dieselben Grössen am Ende sind:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\varkappa}. \tag{52}$$

Wenn sonach ein Gas ohne Wärmeabgabe oder Wärmezuführung sich ausdehnt oder comprimirt wird, so ändert sich

---

$$Q = AR(a + t) \log. \frac{v_2}{v_1} + nR \log. \frac{v_2}{v_1}.$$

Der erste Theil, den wir Q_1 nennen wollen, wäre der zu äusserer Arbeit, der zweite, der Q_2 heisse, der zu innerer Arbeit verwandte Theil der Wärme Q und man erhielte dann:

$$Q_2 = \frac{n}{A(a+t)} Q_1, \text{ sowie } Q_1 = \frac{a+t}{a'+t} Q \text{ und } Q_2 = \frac{n}{(a'+t)} \frac{Q}{A}.$$

Wie schon in Anmerkung 1 erwähnt, ist aber jedenfalls für permanente Gase $n = 0$ und sonach $a' = a$ zu setzen.

Volumen und Spannung nach vorstehendem Gesetze, also in der Art, dass $pv^{\varkappa}$ während des Vorganges constant bleibt.

Dieses Gesetz wurde zuerst von *Poisson* gegeben und seitdem auch von anderen Schriftstellern auf anderem Wege gefunden.

Aus Gleichung (52) folgt auch:

$$\frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\varkappa - 1};$$

sonach, wenn wir die Anfangs- und Endtemperatur mit t_1 und t_2 bezeichnen, unter Berücksichtigung von Gleichung (22):

$$\frac{a + t_2}{a + t_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\varkappa - 1}, \qquad (53)$$

aus welcher Gleichung die Temperaturveränderungen erkannt werden, wenn die Volumenveränderungen gegeben sind.

Endlich folgt auch nach Gleichung (22):

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{p_2}{p_1} \frac{a + t_1}{a + t_2},$$

und daher durch Substitution in Gleichung (52):

$$\frac{a + t_2}{a + t_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \qquad (54)$$

Diese längst bekannten Gleichungen, von denen die beiden letzten, (53) und (54), auch direct aus Gleichung (36) und (37) hervorgegangen wären, wenn wir dort $dQ = 0$ gesetzt und integrirt hätten, geben nun vollständigen Aufschluss über die Spannungs-, Volumen- und Temperaturveränderungen der Gase unter den gemachten Voraussetzungen.

Von besonderer Wichtigkeit ist es aber, die Arbeit zu bestimmen, welche das Gas während seiner Ausdehnung verrichtet oder zu seiner Compression erfordert.

Die Gleichung (43) giebt hier sofort, weil $Q = 0$ sein soll:

$$0 = c_1 (t_2 - t_1) + A\int_{v_1}^{v_2} p\, dv;$$

sonach ist die vom Gase während der Ausdehnung von v_1 auf v_2 verrichtete äussere Arbeit, die wir mit F bezeichnen wollen:

$$F = \int_{v_1}^{v_2} p\,dv = \frac{c_1}{A}(t_1 - t_2), \qquad (55)$$

also die in Arbeit verwandelte Wärme:

$$c_1(t_1 - t_2) = -c_1(t_2 - t_1).$$

Diese letzte Gleichung giebt aber, wie bei Betrachtung der Gleichung (40) angegeben wurde, nichts anderes, als die Veränderung der im Gase enthaltenen Wärme und das negative Vorzeichen deutet ein Verschwinden an, oder dass diese Wärme in Arbeit verwandelt wurde; die Gleichung (55) spricht daher aus, dass die ganze vom Gase verrichtete Arbeit von Wärme herrührt, die vorher im Gase enthalten war.

Gleichung (55) schreibt sich auch in folgender Weise:

$$F = \frac{c_1(a + t_1)}{A}\left[1 - \frac{a + t_2}{a + t_1}\right],$$

oder wenn wir berücksichtigen, dass $v_1 p_1 = R(a + t_1)$ ist, und die Gleichungen (53) und (54) benutzen:

$$F = \frac{c_1}{AR} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\varkappa - 1}\right], \qquad \text{oder auch}$$

$$F = \frac{c_1}{AR} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}\right].$$

Nach Gleichung (30) ist aber $AR = c - c_1$ und daher der Factor

$$\frac{c_1}{AR} = \frac{c_1}{c - c_1} = \frac{1}{\varkappa - 1},$$

wobei bekanntlich für atmosphärische Luft $\varkappa = \frac{c_1}{c} = 1{,}41$ gesetzt werden soll: dann schreiben sich die letzten beiden Gleichungen auch in folgender Form:

$$F = \frac{1}{\varkappa - 1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\varkappa - 1}\right], \qquad (56)$$

und $$F = \frac{1}{\varkappa - 1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \right], \tag{57}$$

Gewöhnlich giebt man diese Gleichungen in vorstehender Form; für den praktischen Gebrauch ist aber Gleichung (55) die bequemste, weil sie nur die Temperaturen als bekannt voraussetzt.

Ein Beispiel soll das Vorstehende näher beleuchten.

Es sei in einem Cylinder ein Kilogramm atmosphärische Luft eingeschlossen, deren Spannung $p_1 = 1^1/_2$ Atmosphäre und deren Temperatur $t_1 = 30^0$ betragen. Diese Luft dehne sich ohne Wärmezuführung aus und zwar sei, wie oben vorausgesetzt wurde, der Gegendruck gegen den Kolben in jedem Momente gleich dem eben im Innern stattfindenden Luftdrucke.

Die Ausdehnung finde soweit statt, bis die Spannung auf eine Atmosphäre gesunken ist.

Nach Gleichung (54) berechnet sich zunächst die Temperatur des Gases am Ende

$$t_2 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} (a + t_1) - a = \left(\frac{1}{1{,}5}\right)^{\frac{0{,}41}{1{,}41}} (273 + 30) - 273,$$

oder $$t_2 = -3{,}7^0.$$

Die Luft kühlt sich sonach bis auf $-3{,}7^0$ ab.

Die in Arbeit verwandelte Wärme ist dann nach Obigem:

$$c_1 (t_1 - t_2) = 0{,}1687 (30 + 3{,}7) = 5{,}685 \text{ Calorien},$$

und daher die vom Gase verrichtete Arbeit:

$$424 \,.\, 5{,}685 = 2410{,}5 \text{ Meterkilogr.}$$

Das Expansionsverhältniss endlich ist nach Gleich. (21):

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{p_1}{p_2} \frac{a + t_2}{a + t_1} = 1{,}333 = \frac{4}{3}.$$

§ 19.

Verhalten des Gases, wenn es plötzlich einem constanten äusseren Drucke ausgesetzt wird, der grösser oder kleiner, als der anfängliche Druck des Gases ist, und wenn dabei weder Wärme zu- noch abgeführt wird.

Denke man sich in einem Cylinder gerade die Gewichtseinheit von atmosphärischer Luft von der Spannung p, der Temperatur t und dem Volumen v eingeschlossen, und den Kolben so belastet, dass eben Gleichgewicht stattfindet. Plötzlich soll nun der Druck gegen den Kolben von aussen auf den Druck p_1 gebracht und so constant erhalten werden. Ist $p_1 > p$, so findet sofort Compression, und ist $p_1 < p$, so findet sofort Ausdehnung des Gases statt. Es fragt sich nun, wenn wir zunächst nur den letzteren Fall betrachten, „welches ist die Temperatur und das Volumen des Gases am Ende, wenn während der Ausdehnung weder Wärme zu- noch abgeführt wird, und wenn die Ausdehnung so weit stattfindet, bis auch das Gas den Druck p_1 erreicht hat?“ (Der Kolben werde aber dabei aus Gründen, die unten näher erörtert werden, ausdrücklich als gewichtslos betrachtet.)

Sei die Temperatur am Ende nur noch t_1, so ist nach Gleichung (40) die Abnahme der inneren Wärme:

$$c_1 (t - t_1).$$

Da nun von aussen weder Wärme zu- noch abgeführt wurde, so ist diese verschwundene Wärme in äussere Arbeit verwandelt worden. Diese Arbeit ist aber, wenn v_1 das Volumen des Gases am Ende des Vorganges ist, weil p_1 constant vorausgesetzt wird:

$$p_1 (v_1 - v),$$

und daher die dieser Arbeit entsprechende Wärmemenge:

$$A p_1 (v_1 - v).$$

Hiernach ist offenbar:

$$c_1 (t - t_1) = A p_1 (v_1 - v). \tag{58}$$

Nun ist ferner nach Gleichung (22):

$$p_1 v_1 = R(a + t_1) \text{ und } pv = R(a + t).$$

Bestimmt man daraus $v_1 - v$ und setzt es in Gleichung (58), so folgt:

$$c_1(t - t_1) = AR(a + t_1) - \frac{p_1}{p} AR(a + t)$$

und daraus berechnet sich die Unbekannte t_1, d. h. die Temperatur des Gases am Ende. Nach einigen Reductionen unter Beachtung der Gleichung (30) folgt:

$$t_1 = t - \frac{AR}{c} \frac{p - p_1}{p} (a + t), \qquad (59)$$

wo c die specifische Wärme bei constantem Drucke ist.

Mit Hülfe dieses Werthes von t_1, sowie des gegebenen Werthes von p_1, berechnet sich nach Gleichung (22) leicht das Endvolumen v_1, und dieselbe Gleichung giebt für das Expansionsverhältniss:

$$\frac{v_1}{v} = \frac{p}{p_1} \frac{a + t_1}{a + t}. \qquad (60)$$

Endlich ist die vom Gase verrichtete äussere Arbeit, die wir mit F bezeichnen:

$$F = \frac{c_1}{A} (t - t_1), \qquad (61)$$

und unter Benutzung von Gleichung (59), wenn man mit $\varkappa$ wieder das Verhältniss $\frac{c}{c_1} = 1{,}41$ der Wärmecapacitäten versteht, auch

$$F = \frac{R}{\varkappa} \frac{p - p_1}{p} (a + t), \qquad (62)$$

oder noch einfacher unter Zugrundelegung der Gleich. (22):

$$F = \frac{p - p_1}{\varkappa} v. \qquad (63)$$

Die Aufgabe ist also vollständig gelöst. Die vorstehenden Ausdrücke gelten zugleich auch für den Fall, dass der constante Gegendruck p_1 grösser, als die anfängliche Spannung der Luft ist, also Compression ohne Zuführung und Entziehung von Wärme sattfindet.

Sei z. B. wieder die anfängliche Spannung des Gases im Cylinder $1\frac{1}{2}$ Atmosphäre und die Temperatur 30^0. Das Gas werde plötzlich einem Drucke von 1 Atmosphäre ausgesetzt, welches ist dann die Temperatur desselben, wenn es während seiner Ausdehnung bis auf eine Atmosphäre den constanten Gegendruck von einer Atmosphäre überwindet?

Gleichung (59) giebt sofort:

$$t_1 = 30 - \frac{0{,}41}{1{,}41} \cdot \frac{0{,}5}{1{,}5} (273 + 30) = + 0{,}63^0.$$

Ferner ist das Expansionsverhältniss nach Gleich. (60):

$$\frac{v_1}{v} = 1{,}354$$

und die äussere Arbeit des Gases nach Gleichung (61):

$$F = 424 \,.\, 0{,}1687\,(30 - 0{,}63) = 2100{,}8 \text{ Meterkilogramme.}$$

Man bemerkt hiernach, dass die Temperaturerniedrigung im vorliegenden Falle nicht so gross ist, wie wir sie im vorher behandelten Probleme fanden, wo das Gas fortwährend einen Druck überwindet, der in jedem Augenblicke seiner Spannung gleich ist.

Das vorliegende Problem scheint mir von besonderer Wichtigkeit; die angenommenen Verhältnisse müssen nämlich auftreten, wenn man ein Gas aus einem Behälter in einen Raum strömen lässt, in welchem ein constanter Gegendruck stattfindet, also z. B., wenn das Gas in die freie Luft ausströmt. Gleichung (59) giebt dann die Temperatur des Gases in dem Momente an, wo seine Spannung in die der äusseren Atmosphäre übergegangen ist, was aber jedenfalls erst in einer gewissen Entfernung von der Ausflussmündung der Fall ist. Die Gleichungen (61) bis (63) geben dann die bis zu diesem Momente von dem Gase verrichtete Arbeit an. Man kann aber aus vorstehendem Probleme nicht etwa auf die Temperatur des Gases unmittelbar vor der Mündung, sowie überhaupt auf das weitere Verhalten des Gases während des Ausströmens, also, was sehr wünschbar wäre, auf die Ausflussgeschwindigkeit des Gases schliessen. Das ganze Problem giebt nur Aufschluss über den Endzustand des Gases beim

Ausflusse, und die vorstehenden Resultate hindern durchaus nicht, sich der Ansicht *Weisbach*'s anzuschliessen, dass die Temperatur des ausströmenden Gases unmittelbar an der Mündung nach den Formeln des vorigen Problems, § 18, berechnet werden müsse.

Aehnliches gilt auch, wenn man sich das Gas in einem Cylinder eingeschlossen denkt und sich vorstellt, dass dasselbe dort einen „gewichtslosen" Kolben zurückschiebt und dabei den constanten Gegendruck p_1 überwindet, wie wir das ursprünglich annahmen. Der gewichtslose Kolben weicht mit einer solchen Geschwindigkeit zurück, dass das Gas während seiner Ausdehnung nicht schnell genug zu folgen vermag und nur einen Druck p_1 gegen den Kolben ausübt, der gleich dem Gegendrucke, also geringer ist, als die Spannung des Gases für das Volumen in dem betreffenden Momente sein würde, wenn der Kolben ruhen würde. Während des ganzen Vorganges ist jedenfalls das Gas in einem eigenthümlichen Zustande, der bis jetzt noch nicht erkannt werden kann und über den auch die obigen Rechnungen keinen Aufschluss geben, da sie nur den Endzustand bestimmen.

Ist der Kolben nicht gewichtslos, dann ist der Vorgang ein anderer, der Kolben weicht langsamer zurück, der Gasdruck ist immer grösser als der Gegendruck, und der Ueberschuss des Druckes wird auf Beschleunigung der Kolbenmasse verwandt. Ist endlich die Masse des Kolbens verhältnissmäsig sehr bedeutend, dann weicht er mit so geringer Geschwindigkeit zurück, dass das Gas vollständig zu folgen vermag, und dann übt es fortwährend einen Druck aus, der seinem augenblicklichen Volumen und der daselbst stattfindenden Temperatur entspricht; dann hat man es jedenfalls vollständig mit dem vorhergehenden in § 18 behandelten Probleme zu thun.

Als speciellen Fall können wir noch die Annahme behandeln, dass der constante Gegendruck p_1 gegen den „gewichtslosen" Kolben Null ist, dann ist offenbar die vom Gase während der Ausdehnung verrichtete äussere

Arbeit „Null“ und für diesen Fall giebt Gleichung (58):

$$c_1(t-t_1)=0, \quad \text{oder}$$

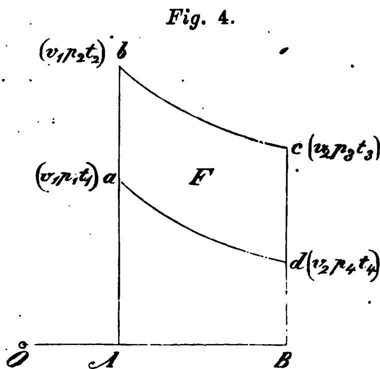
$$t_1=t,$$

d. h. die Temperatur des Gases bleibt dann constant. Derselbe Fall müsste auch eintreten, wenn man ein Gas in einen luftleeren Raum strömen lässt. Die Versuche von *Joule* bestätigen diesen Satz vollständig; derselbe fand, dass, wenn man ein mit Luft gefülltes Gefäss mit einem anderen luftleeren verbindet, die Temperatur des Gases trotz der Ausdehnung am Ende wieder die anfängliche ist; ich sage ausdrücklich am Ende, denn während der Verbreitung der Luft im anfänglich luftleeren Raume oder während sie, ohne einen Gegendruck überwinden zu müssen, in einem Cylinder einen gewichtslosen Kolben fortschiebt, können doch Temperaturveränderungen stattfinden. Die Theorie und *Joule*'s Versuche bewiesen bis jetzt nur, dass zuletzt, wenn das Gas zur Ruhe gelangt ist, es die anfängliche Temperatur unter den gemachten Voraussetzungen wieder erlangt hat.

§ 20.

Im Folgenden mag nun noch die Arbeit einer vollkommenen calorischen Maschine entwickelt werden.

Fig. 4.



Nehme man an, ein Kilogramm atmosphärischer Luft vom Volumen v_1, der Spannung p_1 und der Temperatur t_1 sei in einem Cylinder eingeschlossen, und denke man sich, dass in nebenstehender Figur 4 die Abscisse OA das Volumen v_1, und die Ordinate Aa die Spannung p_1 darstelle.

Das Gas soll jetzt bei constantem Volumen v_1 durch Wärmezuführung auf die Temperatur t_2 gebracht werden. Die ganze zuzuführende Wärmemenge ist daher:

$$Q_1 = c_1 (t_2 - t_1) \tag{64}$$

und die Spannung des Gases wird dadurch von $Aa = p_1$ auf $Ab = p_2$ steigen, welch letzterer Werth sich übrigens leicht nach dem *Mariotte* und *Gay-Lussac*'schen Gesetze bestimmen lässt. (Bei calorischen Maschinen geschieht diese Erwärmung, wenn die Maschine im Beharrungszustande ist, theils durch wirkliche Wärmezuführung von aussen, theils dadurch, dass man das Gas durch den heissen Regenerator streichen lässt.) Nun gestatten wir dem Gase, sich vom Volumen $OA = v_1$ auf das Volumen $OB = v_2$ auszudehnen, und zwar soll dabei weder Wärme zu- noch abgeführt werden. Sinkt dabei die Temperatur von t_2 auf t_3, und die Spannung von $AB = p_2$ auf $Bc = p_3$, so ist nach Gleichung (55) die in Arbeit verwandelte Wärme:

$$c_1 (t_2 - t_3)$$

und die Arbeit selbst wird in der Figur durch die Fläche $AbcB$ dargestellt.

Nachdem das Gas das Volumen v_2 erreicht hat, soll ihm nun bei constantem Volumen eine Wärmemenge Q_2 entzogen werden, so dass seine Temperatur von t_3 auf t_4 und seine Spannung von $Bc = p_3$ auf $Bd = p_4$ sinkt. (Bei calorischen Maschinen geschieht diese Wärmeentziehung dadurch, dass man das Gas durch den Regenerator streichen lässt, der vorher seine Wärme abgegeben hatte.)

Die Wärmemenge, die dem Gase entzogen, also vom Regenerator aufgenommen wird, ist

$$Q_2 = c_1 (t_3 - t_4). \tag{65}$$

Endlich wird das Gas ohne Wärmezuführung, noch Abgabe von Wärme wieder zusammengedrückt, so dass es schliesslich wieder das anfängliche Volumen v_1 und die anfängliche Spannung p_1 und Temperatur t_1 hat. Zu dieser Compression ist eine Arbeit erforderlich, die durch die Fläche $ABda$ dargestellt ist, und welcher nach Gleichung (55) die Wärmemenge $c_1 (t_1 - t_4)$ entspricht.

Da das Gas genau in seinen anfänglichen Zustand zurückgekehrt ist, so ist seine innere Wärme auch die anfängliche, und sonach muss, da eine Arbeit F gewonnen wurde, die durch die Fläche $abcd$ repräsentirt wird, eine Wärmemenge AF verschwunden sein, welche der Differenz der zugeführten Wärmemenge Q_1 und der abgeführten und vom Regenerator aufgenommenen Q_2 entspricht; sonach ist

$$AF = Q_1 - Q_2,$$

oder die gewonnene Arbeit:

$$F = \frac{c_1}{A}(t_2 - t_1) - \frac{c_1}{A}(t_3 - t_4).$$

Nun ist aber nach dem Gesetze, das durch Gleichung (53) ausgesprochen wird und nach den angegebenen Bezeichnungen und Vorgängen:

$$\frac{a + t_3}{a + t_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\varkappa - 1} \text{ und } \frac{a + t_4}{a + t_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\varkappa - 1}$$

und daraus folgt, wenn wir das Verhältniss $\frac{v_1}{v_2}$, also das Expansionsverhältniss mit ε bezeichnen:

$$t_3 - t_4 = (t_2 - t_1)\,\varepsilon^{\varkappa - 1}.$$

Führt man diesen Werth noch in obige Gleichung für F ein, so folgt:

$$F = \frac{c_1}{A}(t_2 - t_1)(1 - \varepsilon^{\varkappa - 1}), \qquad (66)$$

und das ist die Arbeit einer vollkommenen calorischen Maschine und zwar die Arbeit, welche der Gewichtseinheit Gas entspricht.

Ist die Maschine im Gange, so hat man stets nur pro Gewichtseinheit Gas eine Wärmemenge zuzuführen, die der in Gleichung (66) gefundenen äusseren Arbeit entspricht, denn der erste Theil $c_1(t_2 - t_1)$ entspricht der Wärmemenge, die man braucht, um das Gas von t_1 auf t_2 zu erwärmen, da man aber dazu die Wärmemenge $c_1(t_2 - t_1)\,\varepsilon^{\varkappa - 1}$ mit benutzt, die das Gas vorher an den Regenerator abgegeben hatte, so ist von aussen nur die Differenz beider, nämlich:

$$c_1 (t_2 - t_1)(1 - \varepsilon^{\varkappa - 1})$$

zuzuführen und diese Wärmemenge wird sonach vollkommen in äussere Arbeit verwandelt. Das Letztere ist, wie wir sehen werden, bei Dampfmaschinen bei Weitem nicht der Fall.

Jedenfalls sind die calorischen Maschinen hiernach im Princip vollkommen, bekanntlich sind aber bis jetzt die praktischen Schwierigkeiten bei ihrer Herstellung noch nicht zu überwinden gewesen.

Selbst wenn ihre Herstellung noch gelingen sollte, wird nun freilich nicht die ganze durch Gleichung (66) angegebene Arbeit aus 1 Kilogramm Luft gewonnen werden können, weil auch hier, wie bei allen anderen Maschinen, Arbeitsverluste stattfinden.

Denken wir uns, eine calorische Maschine braucht pro Secunde gerade 1 Kilogramm Luft; es würde die Luft von $t_1 = 0^0$ auf $t_2 = 300^0$ erhitzt und das Expansionsverhältniss betrüge $\frac{v_1}{v_2} = \varepsilon = \frac{1}{4}$, so wäre die theoretische Arbeit der Maschine:

$$F = \frac{c_1}{A} (t_2 - t_1)(1 - \varepsilon^{\varkappa - 1}) = 0{,}1687 \,.\, 424 \,.\, 200\,(1 - 0{,}25^{0{,}41})$$

oder $F = 6202{,}4$ Meterkilogramme oder $82{,}69$ Pferdestärken.

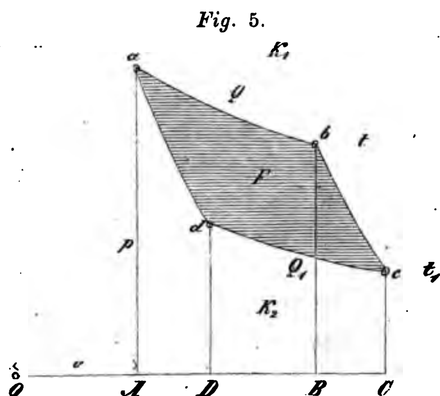
Von weiteren Untersuchungen dieser Maschine soll hier abgesehen werden, da diese uns zu weit vom vorgesteckten Ziele entfernen würden; wir verweisen daher auf das vortreffliche Werk von *Redtenbacher*: „Die calorische Maschine", und in Betreff der Anordnung dieser Maschinen auf den im „Civilingenieur", Bd. I, S. 91, befindlichen Aufsatz. Es sei nur noch erwähnt, dass das Hauptübel dieser Maschinen darin besteht, dass ihre Dimensionen zu bedeutend ausfallen, und die hohe Temperatur, welche das arbeitende Gas erhalten muss, auf die Dauerhaftigkeit ihrer einzelnen Theile und auf die Dichtungen von sehr schädlichem Einflusse ist.

§ 21.

Endlich soll noch einmal auf die Betrachtungen eingegangen werden, die wir in Capitel I anstellten, und die uns dort auf die zweite Hauptgleichung der mechanischen Wärmetheorie führten.

Wir dachten uns, ein Körper vom Volumen $OA = v$ und der Spannung $Aa = p$ (Figur 5) dehne sich bei constanter Temperatur t auf das Volumen $OB = v_1$ aus; dazu erforderte es die Wärmemenge Q von einem mit ihm in Berührung befindlichen Körper K_1 von der Temperatur t_1. Nach diesem gestatteten wir dem Körper, sich noch weiter von $OB = v_1$ auf $OC = v_2$ auszudehnen, jedoch ohne dass wir Wärme zu- oder abführen; dadurch sinkt seine Temperatur auf t_1. Dann wird der Körper bei constanter Temperatur t_1, in Berührung mit dem Körper K_2, der ihm die freiwerdende Wärme Q_2 entzog, comprimirt, und zwar vom Volumen $OC = v_2$ auf $OD = v_3$, so dass, wenn er jetzt ohne Wärmezu- oder Wärmeabführung auf das Volumen v comprimirt wird, er auch seine anfängliche Temperatur t und Spannung p wieder erhält. Die innere Wärme war dann wieder die anfängliche, und die in Arbeit verwandelte Wärme betrug

Fig. 5.



$$AF = Q - Q_1,$$

wo F die gewonnene Arbeit (Fläche $abcd$) darstellt.

Wir fanden nun folgende Beziehungen:

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{T}{T_1} \quad \text{und} \quad AF = Q \cdot \frac{T - T_1}{T} = Q_1 \cdot \frac{T - T_1}{T_1},$$

wo T und T_1 unbekannte Functionen von t und t_1 waren; da wir jetzt aber wissen, dass diese Functionen nichts anderes, als die absoluten Temperaturen, nämlich $T = a + t$ und $T_1 = a + t_1$ bedeuten, so schreibt sich auch:

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{a + t}{a + t_1} \tag{67}$$

und

$$AF = Q \cdot \frac{t - t_1}{a + t} = Q_1 \cdot \frac{t - t_1}{a + t_1} \tag{68}$$

und diese Gleichungen gelten ebenfalls noch für alle Körper.

Der vermittelnde Körper sei aber jetzt ein Gas. Für dieses hat sich die Wärmemenge Q ergeben, die erforderlich ist, damit es sich bei constanter Temperatur vom Volumen v auf v_1 ausdehne, nach Gleichung (49):

$$Q = AR(a + t) \, logn. \frac{v_1}{v}. \tag{69}$$

In gleicher Weise ergiebt sich nach derselben Gleichung (49) die vom Körper K_2 aufgenommene Wärme

$$Q_1 = AR(a + t_1) \, logn. \frac{v_3}{v_2}, \tag{70}$$

oder auch nach Gleichungen (67) und (69):

$$Q_1 = AR(a + t_1) \, logn. \frac{v_1}{v}. \tag{71}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$\frac{v_3}{v_2} = \frac{v_1}{v}$$

und endlich die bei diesem Processe gewonnene äussere Arbeit:

$$F = R(t - t_1) \, log. \frac{v_1}{v}. \tag{72}$$

Dabei sei noch bemerkt, dass die Arbeit, welche das Gas verrichtet, während es sich von $OB = v_1$ auf $OC = v_2$ ausdehnt, nach Gleichung (55):

$$\frac{c_1}{A}(t - t_1)$$

ist, und ebenso gross ist die Arbeit, die es erfordert, um

schliesslich vom Volumen $D = v_3$ auf das Volumen $OA = v$ comprimirt zu werden; die beiden Flächen $ADda$ und $BCcb$ sind sonach gleich, und die gewonnene durch $abcd$ dargestellte Arbeit ist daher auch gleich der Differenz der Flächen $ABba$ und $DCcd$.

So wie in den beiden letzten Fällen, liessen sich noch eine ganze Reihe anderer Processe ersinnen, durch die man Wärme in Arbeit verwandelt, und bei denen, was eben wesentlich ist, der vermittelnde Körper schliesslich wieder in seinen anfänglichen Zustande zurückkehrt.

§ 22.

Den zuletzt betrachteten Fall habe ich hauptsächlich nochmals hervorgehoben, weil die erhaltenen Formeln (67) und (68) leicht zu unrichtigen Schlüssen führen können.

Wir fanden nämlich, dass bei dem zuletzt betrachteten Processe die Wärmemenge Q dem Körper K_1 entzogen und die Wärmemenge Q_1 dem Körper K_2 mitgetheilt wurde und dass dabei die Wärmemenge $Q - Q_1$ als Arbeit erschien. Nehmen wir nun an, dass man die beiden Körper K_1 und K_2 so lange in unmittelbare Berührung bringt, bis vom wärmeren zum kälteren Körper die Wärmemenge Q_1 übergegangen ist, so hat in diesem Falle die Wärmeüberführung stattgefunden, ohne dass man Arbeit gewonnen hat. Man könnte nun behaupten, dass mit einer solchen Uebertragung ein Wärmeverlust stattfinde, „denn“, liesse sich schliessen: „wäre statt der directen Ueberführung der oben beschriebene Process eingeschlagen worden, so hätte man gleichzeitig die Wärmemenge $Q - Q_1$ als Arbeit gewinnen können, sonach ist diese letztere Wärmemenge als verloren zu betrachten und der Verlust ist nach Gleichung (68):

$$AF = Q \frac{t - t_1}{a + t}.$$

Dieser Schluss wäre aber falsch, denn wenn dem Körper K_2 durch directe Ueberführung die Wärmemenge Q_1

zugetheilt wird, so verliert der Körper K_1 auch nur diese Wärmemenge, während er bei obigem Processe die grössere Wärmemenge Q hergiebt. Sonach ist die Wärmemenge $Q - Q_1$ nicht verloren, sondern als Wärme noch im Körper K_1 enthalten und steht uns ebenso wie die Wärmemenge Q_1 im Körper K_2 zur Erzeugung von Arbeit noch zu Gebote.

Wenn also hiermit erwiesen ist, dass durch directe Uebertragung keine Wärmeverluste eintreten, so soll jedoch damit nicht gesagt sein, dass bei Maschinen solch directe Uebertragungen ohne Nachtheil seien. Da die hierher gehörige Untersuchung sehr wichtig, besonders zur Beurtheilung der Wärmebenutzung bei Dampfmaschinen ist, so soll noch speciell darauf eingegangen werden.

Zu diesem Zwecke denke man sich, der zuletzt beschriebene Process werde mit irgend einem Körper von der Temperatur t ausgeführt. Der Körper dehne sich also erst bei constanter Temperatur t in Berührung mit dem Körper K_1 aus und empfange von diesem die Wärmemenge Q; dann gestatte man ihm, aber ohne Wärme zu- oder abzuführen eine weitere Ausdehnung bis seine Temperatur auf t_2 sinkt und drücke dann den Körper bei constanter Temperatur t_2 in Berührung mit einem Körper K_3 dessen Temperatur t_2 ist, soweit zusammen, dass er dann bei weiterer Compression ohne Wärmeabführung in seinen anfänglichen Zustand zurückkehrt.

Die in Arbeit verwandelte Wärme ist dann nach Gleichung (68):

$$AF = Q \cdot \frac{t - t_2}{a + t}. \qquad (73)$$

Jetzt soll aber der Process in anderer Weise ausgeführt werden.

Wir wollen zunächst den Körper K_1 mit einem Körper K_2 von der Temperatur t_1 (wobei aber t_1 grösser als t_2 und kleiner als t sei) in directe Berührung bringen und zwar so lange, bis der erstere an den letztern die Wärmemenge Q abgegeben hat.

Nun nehmen wir wieder einen vermittelnden Körper von der Temperatur t_1 und machen mit diesem die gleichen Operationen durch; lassen diesen sich in Berührung mit dem Körper K_2, also bei constanter Temperatur t_1, so lange ausdehnen, bis er die Wärmemenge Q von K_2 aufgenommen hat; gestatten ihm dann eine weitere Ausdehnung ohne Wärmezuführung und zwar soweit, bis seine Temperatur ebenfalls auf t_2 gesunken ist; dann wird er auch in Berührung mit dem Körper K_3, also bei constanter Temperatur t_2 comprimirt und zwar soweit, dass, wenn er am Schlusse ohne Wärmeabführung auf das anfängliche Volumen gebracht worden ist, er auch im Uebrigen in den anfänglichen Zustand zurückgekehrt ist.

Nennen wir hier die gewonnene Arbeit F_1, so folgt für für diesen Fall die in Arbeit verwandelte Wärme:

$$A F_1 = Q \frac{t_1 - t_2}{a + t_1}. \tag{74}$$

Die beiden Gleichungen (73) und (74) schreiben sich auch:

(Process I) $$AF = Q\left(1 - \frac{a + t_2}{a + t}\right), \tag{75}$$

(Process II) $$AF_1 = Q\left(1 - \frac{a + t_2}{a + t_1}\right) \tag{76}$$

und diese Gleichungen zeigen sofort, dass, so lange $t_1 < t$ und die Temperatur t_2 bei beiden Processen die gleiche ist, die beim zweiten Processe gewonnene Arbeit kleiner ist, als die vom ersteren; daraus schliesst man, dass, wenn die Temperaturen t und t_2 bestimmt vorgeschrieben sind, es practisch unvortheilhaft ist, zuerst die Wärmemenge Q durch Leitung von einem Körper K_1 von höherer Temperatur t zu einem andern K_2 von niederer Temperatur t_1 überzuführen und dann erst auf bemerkte Weise den entsprechenden Theil in Arbeit zu verwandeln. Sonach muss es als eine practische Regel gelten, dass der vermittelnde Körper wo möglich die Temperatur der Wärme-

quelle K_1 habe und dass daher das Temperaturintervall $t_1 - t_2$ möglichst gross sei.

Diese letztere unzweckmässige Benutzung findet nun wirklich bei Dampfmaschinen statt, bei denen die Wärme der stark erhitzten Feuerluft unter dem Kessel erst auf das im Kessel befindliche Wasser, das eine weit geringere Temperatur hat, durch Leitung übertragen wird.

Das Wasser, als solches und als Dampf, ist hier der vermittelnde Körper und stellt man sich vor, dass mit diesem genau der oben beschriebene Process vorgenommen und die Ausdehnung oder Expansion des Dampfes soweit getrieben werden könne, bis er die Temperatur des Condensators angenommen hat, dann lässt sich durch folgendes Beispiel das Vorstehende noch deutlicher hervorheben.

Es sei die Temperatur im Condensator $t_2 = 40^0$; die Temperatur im Feuerraum $t = 1000^0$ und die Temperatur des im Kessel befindlichen Wassers resp. $t_1 = 110^0$, 145^0 und 180^0 so findet sich wegen $a = 273$ nach Gleichung (74), wenn Q die in einer gewissen Zeit in den Kessel tretende Wärme bedeutet, die als Arbeit gewonnene Wärme im Verhältniss zu Q:

$$t_1 = 100; \qquad 145; \qquad 180.$$
$$\frac{AF_1}{Q} = 0{,}183 \qquad 0{,}251 \qquad 0{,}309,$$

während sich das Maximum der Arbeit nach Gleichung (73) ergiebt zu:

$$\frac{AF}{Q} = 0{,}754.$$

Daher ist das Verhältniss $F_1 : F$ für die verschiedenen Werthe von t resp.

$$\frac{F_1}{F} = 0{,}243; \quad 0{,}332; \quad 0{,}410.$$

Aus allen diesen Werthen erkennt man, wie unzweckmässig die Wärmebenutzung selbst bei einer vollkommenen Dampfmaschine, wie wir sie hier annahmen, schon allein

deswegen ist, weil die Temperatur des Wassers im Kessel wesentlich von der der Wärmequelle abweicht. In Wirklichkeit kommen aber noch andere Unvollkommenheiten hinzu, sodass, wie das folgende Capitel näher zeigen wird, die Wärmebenutzung bei Dampfmaschinen noch viel unzweckmässiger erscheint.

Capitel III.

Von den Dämpfen im gesättigten und überhitzten Zustande.

---

§ 23.

Von allen Dämpfen, d. h. solchen Gasarten, welche aus tropfbaren Flüssigkeiten durch Wärmezuführung entstehen und die umgekehrt durch Abkühlung wieder in den flüssigen Zustand zurückgeführt werden können, ist der Wasserdampf der wichtigste, und zwar nicht nur wegen der Bedeutung, die er durch seine Benutzung in der Technik erlangt hat, sondern auch weil sein Verhalten durch Versuche am vollständigsten studirt worden ist, und die Resultate dieser Versuche mit Zuverlässigkeit in Verbindung mit den allgemeinen Sätzen der mechanischen Wärmetheorie gebracht werden können; sonach die Mittel gegeben sind, zu tieferer Erkenntniss des Verhaltens dieses Körpers zu gelangen.

Aus diesem Grunde werden wir in der Folge unser Augenmerk auch nur speciell den Wasserdämpfen zuwenden, können dabei aber stets stillschweigend annehmen, dass andere Dämpfe ein ähnliches Verhalten zeigen werden.

Der Wasserdampf tritt bekanntlich in zwei wesentlich von einander verschiedenen Zuständen auf, die man als „gesättigten oder saturirten“ und „ungesättigten oder überhitzten Zustand“ bezeichnet.

Stelle man sich vor, dass in einem Gefässe Dampf und Wasser, beide von einer gewissen Temperatur, enthalten sei; dieser Dampf besitze eine gewisse Spannung und seine Dichtigkeit, d. h. das Gewicht der Cubikeinheit, sei ebenfalls eine bestimmte.

Erweitern wir jetzt das Gefäss und sorgen dafür, dass am Ende dieser Volumenvergrösserung der Dampf und das noch vorhandene Wasser wieder die anfängliche Temperatur besitzen, so zeigt sich, dass ein Theil des anfänglich vorhandenen Wassers in Dampf übergegangen ist, dass aber die Spannung und Dichtigkeit des jetzt vorhandenen Dampfes wieder die anfängliche ist. Wenn wir ferner das Volumen des Gefässes vermindern, so schlägt sich ein Theil des Dampfes nieder, wenn während dieser Verminderung das Ganze auf constanter Temperatur erhalten wird; in jedem Augenblick aber ist auch dann Spannung und Dichtigkeit oder wie wir auch sagen können, das Volumen der Gewichtseinheit Dampf constant geblieben.

Erhöht oder erniedrigt man jetzt die Temperatur, so steigt oder sinkt die Spannung des Dampfes und ebenso seine Dichtigkeit. Wiederholt man dann mit diesem Dampfe den eben beschriebenen Versuch, und sorgt man nur dafür, dass während des Experimentes neben Dampf auch Wasser vorhanden ist, so zeigt sich die gleiche Erscheinung, d. h. Spannung und Dichtigkeit oder das Volumen der Gewichtseinheit Dampf bleibt constant, so lange die Temperatur wieder unverändert bleibt, welche Volumenveränderungen auch mit dem Gefäss vorgenommen werden. Wir sehen sonach, dass, so lange der Dampf mit Wasser in Berührung ist und seine Temperatur durch Wärmezuführung oder Abführung constant erhalten wird, seine Spannung oder Dichtigkeit nicht weiter durch Compression erhöht, oder wie bequemer zu übersehen ist, das Volumen der Gewichtseinheit nicht weiter vermindert werden kann. Man sagt daher von diesem Dampfe: er sei im Maximo der Spannung oder Dichte, oder auch das Volumen der Gewichtseinheit sei ein Minimum.

Bei diesem Dampfe, den man kurzweg „gesättigten Dampf“ nennt, ist also, wie aus dem Bisherigen hervorgeht, die Spannung, Dichtigkeit oder das Volumen der Gewichtseinheit unabhängig von dem Volumen der ganzen Masse von Wasser und Dampf und nur abhängig von der Temperatur.

Wiederholen wir jetzt mit dem Wasser und Dampf im Gefässe den oben gegebenen Versuch, erweitern wir also das Gefäss, indem wir dafür sorgen, dass die Temperatur constant bleibt, so wird, weil immer Wasser in Dampf verwandelt wird, endlich der Augenblick eintreten, wo alles Wasser in Dampf verwandelt ist. Bis zu diesem Momente blieb Spannung und Dichtigkeit, sowie das Volumen der Gewichtseinheit constant. Von nun an aber wird bei Fortsetzung des Versuchs das Verhalten des Dampfes ein anderes und zwar verhält er sich ähnlich wie ein permanentes Gas; d. h. bei Constanthalten der Temperatur und Vergrösserung des Volumens nimmt die Spannung und Dichtigkeit ab, das Volumen der Gewichtseinheit nimmt sonach zu; der Dampf ist jetzt ungesättigt oder überhitzt, das Volumen der Gewichtseinheit enthält in diesem Zustande nicht mehr so viel Wasser im dampfförmigen Zustande, als es bei gleicher Temperatur und bei Anwesenheit von flüssigem Wasser enthalten würde, daher die Bezeichnung „ungesättigter Dampf“, oder wie sich auch sagen lässt: Dampf von derselben Spannung oder Dichtigkeit in Berührung mit Wasser würde eine geringere Temperatur haben, als der Dampf des letztern Versuches, daher die Bezeichnung der Dampf sei im überhitzten Zustande.

§ 24.

Wir handeln im Folgenden zunächst

A.

Vom Dampfe im gesättigten Zustande.

Die Untersuchung des Verhaltens des gesättigten Dampfes ist von besonderer Wichtigkeit, da der Dampf bei

Dampfmaschinen bis jetzt stets in diesem Zustande verwendet wird. Wie schon oben hervorgehoben wurde, ist die Spannung solchen Dampfes nur von der Temperatur, **nicht** aber vom Volumen abhängig, wir können daher auch umgekehrt sagen, dass die Temperatur t eine Function der Spannung p sei und dies allgemein durch die Formel:

$$t = F(p)$$

andeuten. Die Form dieser Function ist noch nicht bekannt, wohl aber ist durch Versuche, besonders durch die berühmten Versuche *Regnault*'s für verschiedene Temperaturen die zugehörige Spannung bestimmt worden.

In Tabelle I (S. am Schlusse) sind für Temperaturen von 5° zu 5° (Col. 1) die zugehörigen Spannungen des Dampfes in Col. 3 nach *Regnault* angegeben und zwar Letztere ausgedrückt in Millimeter Quecksilbersäule. In Col. 2 ist zugleich die absolute Temperatur, d. h. die von — 273° abgezählte Temperatur bemerkt, da wir in der Folge von dem Zeichen:

$$T = a + t = 273 + t$$

mehrfach Gebrauch machen werden. Im Allgemeinen bemerkt man aus den Zahlen dieser Columnen, dass die Spannung des gesättigten Dampfes schnell mit der Temperatur wächst. Von den zahlreichen empirischen Formeln, die die Beziehung zwischen beiden angeben, soll hier keine erwähnt werden, da wir später keine Veranlassung finden, dieselben zu benutzen; wohl aber ist es nothwendig den Werth des ersten Differentialquotienten dieser Function für verschiedene Temperaturen zu kennen. In Columnen 4 sind die Werthe von $\frac{dp}{dt}$ angegeben. Obgleich zwar die Function $t = F(p)$ oder wie wir auch schreiben können $p = F(t)$ nicht bekannt ist, so lässt sich doch wenigstens aus *Regnault*'s Versuchen der Werth des ersten Differentialquotienten bestimmen und zwar ist das hier in einer Weise geschehen, wie folgendes Beispiel es zeigen wird:

Um z. B. diesen Werth für 80° zu erhalten, wurden die Differenzen der Werthe von p für die Temperaturen

79°, 80° und 81° bestimmt, und angenommen, dass das Mittel aus den beiden Differenzen genau genug den ersten Differentialquotienten für 80° gibt; so ist nach *Regnault*:

Temperatur	Spannung	Differenzen	Mittel
79	340,464		
		14,152	
80	354,616		14,397
		14,642	
81	369,258		

Der letztere Werth steht nun in der Tabelle als Werth des Differentialquotienten $\frac{dp}{dt}$ für $t = 80°$. Auf diese Weise wurden diese Werthe der Col. 4 von *Clausius* von 40° bis 200° berechnet*), während ich auf gleiche Art auf Grund der *Regnault*'schen Angaben die Werthe für 0 bis 40° beifügte.

§ 25.

Gehen wir nun darauf über, das Verhalten des gesättigten Dampfes nach den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie zu untersuchen, so ist die erste Frage, welche Wärmemenge erforderlich ist, um aus der Gewichtseinheit Wasser etwa von 0° Temperatur gerade die Gewichtseinheit von gesättigtem Dampf von bestimmter Temperatur t oder, da die Spannung p nur von t abhängt, Dampf von gewisser Spannung zu erzeugen. Ohne mich auf die früher gegebenen Regeln zur Bestimmung dieser Wärmemenge einzulassen, hebe ich sofort die jetzt allgemein gebrauchte Formel hervor, die *Regnault* aus seinen Versuchen dafür ableitet. Er gibt die Wärmemenge Q, welche unter den oben bemerkten Voraussetzungen der Gewichtseinheit Wasser von 0° von aussen zuzuführen ist, um die Gewichtseinheit Dampf von $t°$ Temperatur zu erzeugen, durch die empirische Formel:

$$Q = 606{,}5 + 0{,}305\,t. \tag{77}$$

Die bisherigen Betrachtungen haben uns nun aber gezeigt, dass die Wärmemenge, die man einem Körper von

*) *Poggendorff's* Ann. Bd. 97. S. 555. —

aussen zuführen muss, um ihn in einen andern gegebenen Zustand überzuführen, nur dann vollständig bestimmt werden kann, wenn man weiss, „welchen Weg der Veränderungen der Körper während der Wärmezuführung durchlaufen hat.“ Wüssten wir daher nicht, wie *Regnault* seine Versuche durchführte, so würden vom Standpunkt der mechanischen Wärmetheorie aus, seine hierher gehörenden Untersuchungen für uns ganz werthlos sein. Glücklicherweise sind aber diese Versuche in einer Weise durchgeführt und beschrieben*), dass wir vollständig in den Stand gesetzt sind, den Weg der Veränderungen zu überblicken und dadurch wird die Angabe *Regnault's* für unsere Zwecke von der grössten Bedeutung und bildet im Verein mit andern seiner Untersuchungen einen Theil der Grundlage von allem Folgenden.

Die von *Regnault* gegebene Formel ist auf Grund seiner Versuche folgendermassen aufzufassen:

Man denke sich ein Kilogr. Wasser von 0^0 und dieses unter dem Drucke p, dem nämlichen Drucke, welchen der zu erzeugende Dampf haben soll. Um den Vorgang bequemer übersehen zu können, stelle man sich vor dieses Wasser sei in einem Cylinder eingeschlossen, dessen Querschnitt gerade 1 Quadratmeter betrage, und der Kolben, der auf dem Wasser ruht, sei sonach gerade mit p Kilogrammen belastet. Diesem Wasser führt man Wärme von aussen zu, und zwar so lange, bis es die Temperatur t des zu erzeugenden Dampfes erreicht hat. Die bis dahin erforderliche Wärme sei W; bis dahin bildet sich kein Dampf, setzen wir aber jetzt die Wärmezuführung fort, so beginnt die Dampfbildung, und zwar hat der Dampf gerade die Spannung p; er schiebt den Kolben zurück und der frei werdende Raum füllt sich fortwährend mit frischem Dampf von gleicher Spannung, bis endlich alles Wasser in Dampf verwandelt ist. In diesem Momente ist das Ziel erreicht;

---

*) Relation des expériences etc. Mémoires de l'académie royale des sciences de l'institut de France. Tome XXI. Paris 1847.

die **Wärme**, die man dem Wasser von t^0 Temperatur während der Dampfbildung **bei constantem Drucke** zuführen musste, werde mit r bezeichnet; diese Wärmemenge r nennt man gewöhnlich die gebundene oder latente Wärme, denn sie verschwindet für die Thermometerbeobachtungen, weil während des ganzen Vorgangs die Temperatur t constant blieb. Die ganze Wärmemenge, die man unter der gemachten Voraussetzung dem Wasser von 0^0 zuführen musste, beträgt sonach $W + r$ und das ist der Werth von Q, wie ihn *Regnault* gegeben hat; wir können sonach auch schreiben:

$$Q = W + r = 606{,}5 + 0{,}305\, t. \qquad (78)$$

Man kann nun aber ein Kilogramm gesättigten Dampf und der Temperatur t auf unendlich verschiedene Arten aus Wasser von 0^0 erzeugen, wie das Weitere zeigen wird; in jedem einzelnen Falle ist dann die dazu erforderliche Wärmemenge eine andere. Sobald man also die *Regnault*'sche Formel benutzt, muss man genau im Auge behalten, dass sie eben nur unter der Voraussetzung gilt, dass die Gewichtseinheit Wasser erst von 0^0 auf t^0 erwärmt und dann der Dampf bei constantem Drucke p erzeugt wurde. Diese Wärmemenge Q nennt man die Gesammtwärme; obgleich nach dem Vorstehenden diese Benennung nicht als zweckmässig bezeichnet werden kann, so wollen wir sie doch, weil sie allgemein im Gebrauch ist, beibehalten. Columne 5 der Tab. I giebt nach Gleichung (77) berechnet, die Gesammtwärme des Dampfes für die Temperaturen von 5 zu 5 Grad; nach dem Vorhergehenden bedürfen diese Zahlen keiner weitern Erläuterung.

§ 26.

Wir haben vorhin erwähnt, dass die Gesammtwärme aus zwei Theilen besteht; der erste Theil W ist derjenige, welcher erforderlich ist, das Wasser von 0 auf t^0 zu erwärmen. Nennen wir nun c die specifische Wärme des Wassers und nehmen wir die Gewichtseinheit Wasser von

t^0 Temperatur, so ist die Wärmemenge um dasselbe bei constantem Drucke um dt zu erwärmen.

$$dW = c\,dt,$$

also folgt die Wärmemenge, um die Temperatur des Wassers von 0 auf t^0 zu erhöhen:

$$W = \int_0^t c\,dt, \tag{79}$$

wo c die specifische Wärme des Wassers bei constantem Drucke bedeutet. *Regnault* giebt auf Grund seiner Versuche für c den folgenden Ausdruck*):

$$c = 1 + 0{,}00004\,t + 0{,}000\,000\,9\,t^2, \tag{80}$$

wonach also c langsam mit der Temperatur wächst und daher folgt nach Gleichung (79)

$$W = t + 0{,}00002\,t^2 + 0{,}000\,000\,3\,t^3. \tag{81}$$

Nach Gleichung (78) ist daher ferner die sogenannte latente Wärme, für welche wir aber den bessern Aus-

---

*) Betrachtet man den Weg genauer, den *Regnault* zur Bestimmung des Werthes der specifischen Wärme des Wassers eingeschlagen hat, so muss man die Ueberzeugung gewinnen, dass der von ihm gefundene Werth von c nicht die specifische Wärme des Wassers bei constantem Drucke ergiebt. *Regnault* beobachtete nämlich die Wärmemenge, die in einem Kilogramm Wasser von t^0 Temperatur unter dem entsprechenden Druck enthalten ist. Nach der mechanischen Wärmetheorie ist aber das nicht gleichbedeutend mit der Wärmemenge, die man dem Wasser von 0^0 zuführen muss, um es bei constantem Drucke von 0^0 auf t^0 zu erwärmen.

Während der Wärmezuführung dehnt sich nämlich das Wasser aus (wenigstens von 4^0 an), es verrichtet sonach Arbeit; um die dieser Arbeit entsprechende Wärmemenge ist sonach die Wärmemenge, welche erforderlich ist, das Wasser bei constantem Drucke von 0 auf t^0 zu erwärmen, grösser als die von *Regnault* gegebene. Trotzdem kann man bis auf Weiteres unbedenklich den *Regnault*'schen Werth von c als die specifische Wärme des Wassers bei constantem Drucke betrachten, da die Ausdehnung des Wassers innerhalb der gewöhnlichen Temperaturen so gering ist, dass auch die bei der Erwärmung unter constantem Drucke in Arbeit verwandelte Wärme nur als sehr unbedeutend angesehen, und somit vernachlässigt werden kann.

druck „Verdampfungswärme" gebrauchen, wie es von *Clausius* geschah:

$$r = Q - W,$$

oder nach Einführung der Werthe rechts nach Gleichung (77) und (81)

$$r = 606{,}5 - 0{,}695\,t - 0{,}00002\,t^2 - 0{,}000\,000\,3\,t^3. \qquad (82)$$

Diese Verdampfungswärme r drückt also die Wärmemenge aus, welche einem Kilogr. Wasser von t^0 Temperatur zugeführt werden muss, um es unter dem constanten Druck p vollständig in Dampf von der Spannung p und Temperatur t zu verwandeln. Der Werth von r wird im Folgenden so häufig benutzt, dass es wünschenswerth ist, statt der Formel (82) eine einfache Näherungsformel zu besitzen. *Clausius* giebt dafür die Gleichung

$$r = 607 - 0{,}708\,t, \qquad (83)$$

indem er für c einen constanten Mittelwerth und zwar den Werth von c für $t = 100^0$ (nach Gleichung 80) d. h. $c = 1{,}013$ setzt. Dann ergiebt sich nach (79) $W = 1{,}013\,t$ und mit Rücksicht darauf, dass nach *Regnault*'s Versuch genauer für $t = 100^0$, $r = 536{,}2$ ist, die Gleichung (83). Dass die Uebereinstimmung befriedigend ist, zeigt folgende Zusammenstellung:

	t =	0	50	100	150	200
r	Nach *Regnault* Gl. (82)	606,5	571,6	536,5	500,7	464,3
	Nach *Clausius* Gl. (83)	607,0	571,6	536,2	500,8	465,4

Columne 6 Tab. I enthält wieder die Werthe der Verdampfungswärme für Temperaturen von 5^0 zu 5^0 nach Gleichung (83) berechnet.

§ 27.

Die vorstehenden Betrachtungen geben sonach vollständigen Aufschluss darüber, welche Wärmemenge von aussen zuzuführen ist, um aus Wasser von 0^0 unter den gemachten Voraussetzungen Dampf von der Temperatur t zu bilden;

man ersieht ferner, welcher Theil erst zur Erwärmung des Wassers, welcher Theil ferner zur Dampfbildung verbraucht wird; die *Regnault*'schen Versuche geben aber durchaus keinen Aufschluss darüber, welche Wärmemenge schliesslich in einem Kilogramm Dampf von t^0 Temperatur und im gesättigten Zustand enthalten ist. Nach der mechanischen Wärmetheorie ist es, entgegengesetzt den bisherigen Annahmen, unmöglich, dass die Gesammtwärme $Q = 606{,}5 + 0{,}305\,t$ nach der Bildung des Dampfes auch wirklich noch in demselben enthalten sein kann, da der Dampf in dem Cylinder, in welchem wir uns vorhin das zu verdampfende Wasser eingeschlossen dachten, sich Raum machte und zu diesem Zwecke den Kolben mit constantem Drucke p zurückschieben musste. Der Dampf hat sonach während seiner Bildung im vorliegenden Falle Arbeit verrichtet, und dieser Arbeit entspricht eine gewisse Wärmemenge, die während des Vorganges verschwindet und auf deren Bestimmung es zunächst hier ankommt.

Denken wir uns in einem Cylinder von einem Quadratmeter Querschnitt seien M Kilogramm Wasser von der Temperatur t, aber zunächst kein Dampf enthalten, so dass also der Kolben direkt auf das Wasser den Druck p ausübt, wenn er, wie wir voraussetzen wollen, mit p belastet ist. Sei nun das Volumen der Gewichtseinheit Wasser bei t^0 gerade w, so beträgt das Wasservolumen Mw.

Erwärmt man jetzt das Ganze, so bildet sich Dampf von der Spannung p und der Temperatur t, der Kolben wird mit constantem Drucke p zurückgeschoben und zwar wird, wenn m das Gewicht des erzeugten Dampfes und v das Volumen der Gewichtseinheit desselben bezeichnet, der Dampf am Ende das Volumen mv und der Rest des Wassers das Volumen $(M-m)\,w$ einnehmen; bezeichnen wir diese Volumina im Anfange und am Ende auf einen Augenblick mit v_1 und v_2, so ist die vom Dampfe verrichtete Arbeit:

$$\int_{v_1}^{v_2} p\,dv,$$

oder weil die Spannung constant blieb, sonach integrirt werden kann; auch:

$$p\,(v_2 - v_1).$$

Setzen wir hier die eben angegebenen Werthe für die Volumina ein, so ist diese Arbeit auch nach leichter Reduction:

$$mp\,(v - w)$$

und daher die dieser Arbeit entsprechende Wärmemenge:

$$m.\ Ap\,(v - w). \tag{84}$$

Bezeichnen wir nun der Einfachheit wegen die Differenz des Volumens v der Gewichtseinheit Dampf und desjenigen w der Gewichtseinheit Wasser mit u, beide für gleiche Temperatur genommen, setzen wir also

$$v - w = u \tag{85}$$

und verdampfen wir gerade 1 Kilogramm Wasser, d. h. setzen wir $m = 1$, so ist die bei der Bildung von 1 Kilogr. Dampf sofort in Arbeit verwandelte Wärmemenge nach (84)

$$Apu,$$

wobei p sowohl als u Functionen von t sind. Könnte man diese Wärmemenge auf andere Weise noch ausdrücken, was nach den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie leicht ist und gefordert werden muss, weil der entsprechende Werth von u für verschiedene Temperaturen durch die bis jetzt bekannten Versuche nur für einen Temperaturwerth ($t = 100^0$) und auch für diesen sehr unsicher bestimmt ist, so liesse sich der in der Gewichtseinheit Dampf von t^0 Temperatur von der zugeführten Wärme zurückgebliebene Theil sofort bestimmen. Nennen wir diesen Theil J, so folgt:

$$J = Q - Apu. \tag{86}$$

Diese Wärmemenge J werde ich in Zukunft die im Dampf enthaltene Wärme oder die innere Wärme nennen; streng richtig ist freilich die Bezeichnung nicht; J drückt vielmehr die Differenz der Wärmemengen aus, die in einem Kilogr. Dampf von t^0 im gesättigten Zustande und derjenigen, die in einem Kilogr. Wasser von 0^0 enthalten ist. Passender wäre vielleicht das Wort „Dampf-

wärme", wenn nicht Verwechslungen mit dem oben gebrauchten Namen „Verdampfungswärme" stattfinden könnten *).

Bevor ich nun auf die wirkliche Berechnung der Wärmemenge Apu für verschiedene Temperaturen eingehe, der Wärmemenge also, die sogleich in Arbeit verwandelt wird, wenn die Erzeugung des Dampfes unter constantem Drucke stattfindet, mögen zuerst die Resultate dieser Rechnung nach Tab. I nähere Betrachtung finden. Nach den unten entwickelten Formeln habe ich die Werthe von Apu für Temperaturen von 5° zu 5° berechnet und in Col. 7 zusammengestellt, ebenso in Col. 9 die im Dampf enthaltene Wärme J nach Gleichung (86) gegeben. Ein Beispiel wird die Bedeutung aller der gegebenen Zahlen deutlicher hervorheben:

Um aus 1 Kilogr. Wasser von 0° Dampf von 100°, also gerade einer Atmosphäre Spannung zu erzeugen, bedarf es um die Dampferzeugung in der nun mehrfach angedeuteten Art und Weise zu erzielen, nach Col. 5 einer Wärmemenge von 637,00 Calorien. Erst wurde das Wasser von 0° bis 100° erwärmt; von da an begann

---

*) Ganz streng genommen hat der Werth von J nach Gleichung (86) auch nicht genau die zuletzt angegebene Bedeutung; wenn nämlich das Wasser erst bei constantem Druck p von 0 auf t^0 erwärmt wird, so verrichtet es, wie schon in der vorigen Anmerkung hervorgehoben wurde, schon Arbeit, weil es sich ausdehnt, es wird also schon da ein Theil Wärme in Arbeit verwandelt, und zwar wäre diese Wärmemenge $Ap\,(w - w_0)$ für die Gewichtseinheit, wenn w_0 das Volumen derselben bei 0° und w dasselbe bei t^0 bezeichnet. Diese Wärmemenge ist aber nicht bestimmbar, weil es noch vollständig an Versuchen über Ausdehnung des Wassers bei constantem Drucke unter verschiedenen Drücken fehlt. Jedenfalls ist aber die eben angegebene Wärmemenge gegen die Wärmemenge, welche im Ganzen zugeführt werden muss, und welche während der Dampfbildung in Arbeit verwandelt wird, so klein, dass wir sie vernachlässigen und annehmen können, w sei für die gewöhnlich vorkommenden Temperaturen constant, d. h. innerhalb der gewöhnlichen Gränzen sei das Volumen der Gewichtseinheit Wasser unveränderlich.

erst die Dampfbildung und zu dieser allein war nach Col. 6 die Wärmemenge $r = 536{,}20$ Calorien erforderlich; die Differenz $637 - 536{,}20 = 100{,}80$ wurde daher darauf verwendet, erst das Wasser auf 100° zu erwärmen.

Von der ganzen erforderlichen Wärme wurde nach Col. 7 sofort die Wärmemenge von 40,17 Calorien in Arbeit verwandelt, so dass die Arbeit der Gewichtseinheit Dampf von 100° zu $424 . 40{,}17 = 17032{,}08$ Meterkilogr. anzunehmen ist.

Der Rest der zugeführten Wärme, die nun noch im Dampf enthalten ist, beträgt nach Col. (9): 596,83 Calorien.

In Columne 11 ist ferner noch eine Reihe anderer Werthe angegeben, die ebenfalls eine sehr wichtige Bedeutung haben.

Die Verdampfungswärme r (Columne 6) gab die Wärmemenge, die der Gewichtseinheit Wasser von t^0 Temperatur zugeführt werden muss, um es unter constantem Drucke in Dampf von t^0 zu verwandeln; zieht man nun davon die Wärmemenge ab, welche dabei sofort in äussere Arbeit verwandelt wird, so erhält man in dem Werthe:

$$\varrho = r - Apu \tag{87}$$

die Wärmemenge, die allein dazu verwendet wird, bei der Temperatur t oder unter dem Drucke p die Cohäsion des Wassers zu überwinden; diese Wärmemenge in Arbeit ausgedrückt, also

$$\frac{\varrho}{A}$$

ist sonach die Arbeit, welche dazu verwendet wird, die Anordnung der Atome in 1 Kilogr. Wasser und ihre Schwingungsgeschwindigkeit, oder wenn man will, die Schwingungsgeschwindigkeit des die Atome oder Moleküle umgebenden Aethers so umzuändern, dass uns jetzt das Wasser als Dampf von gleicher Temperatur erscheint.

Für $t = 100^0$ ist nach Columne 11 $\varrho = 496{,}03$ Calorien und das mit 424 multiplicirt, würde für diese Temperatur die oben bezeichnete Arbeit ergeben, eine Arbeit, die sehr beträchtlich ist.

Man bemerkt, dass die Werthe von ϱ mit wachsender Temperatur abnehmen. Ich nenne diese Wärmemenge ϱ die „innere latente Wärme“ zum Unterschiede gegen das, was man gewöhnlich latente Wärme nennt (r), und um gleichzeitig anzudeuten, dass diese Wärme eben nur zu innerer Arbeit verbraucht wird.

Auf eine Betrachtung der Werthe der Differenzen, wie sie sich nach Columne 8, 10 und 12 für die Werthe Apu, J und ϱ ergeben, wenn man, wie es in der Tafel geschah, gleichmässig mit der Temperatur fortschreitet, soll erst später eingegangen werden.

§ 28.

Die vorstehenden Betrachtungen lassen erkennen, wie wichtig es für die Theorie der Dämpfe ist, den Werth der Wärmemenge Apu, die bei der Bildung des Dampfes unter obigen Voraussetzungen sofort in Arbeit verwandelt wird, bestimmen zu können. Die mechanische Wärmetheorie giebt hierüber vollständig die Mittel an die Hand.

Denken wir uns wieder, wie oben, einen Cylinder, mit Wasser und Dampf von der Temperatur t gefüllt; das Gewicht des Dampfes sei m, das Gewicht des Wassers sei $M - m$, also das von beiden zusammen M. Ist wieder v das Volumen der Gewichtseinheit Dampf und w das der Gewichtseinheit Wasser, so ist hier das Gesammtvolumen:

$$mv + (M - m).w,$$

oder wenn wir wieder nach Gleichung (85) setzen:

$$v - w = u,$$

weil die beiden Grössen v und w immer in dieser Verbindung vorkommen

$$mu + Mw. \qquad (88)$$

Beträgt das Gesammtgewicht M gerade 1 Kilogr. und bezeichnen wir von jetzt an wieder, wie früher, das Volumen der Gewichtseinheit des zu untersuchenden Körpers (hier Wasser und Dampf) mit v, so ist auch

$$v = mu + Mw. \qquad (89)$$

Dem Ganzen soll nun Wärme von aussen zugeführt werden, und zwar soll, wie bisher immer, die Temperatur t, also auch die Spannung dabei constant bleiben. Sollte 1 Kilogr. Wasser von t in Dampf von t^0 bei constanter Spannung verwandelt werden, so war die Wärmemenge r; soll sonach im vorliegenden Falle nur die Wassermenge dm verdampfen, so ist die zuzuführende Wärmemenge:

$$dQ = r\,dm,$$

dabei wächst natürlich das Volumen v um dv und da die Temperatur t constant bleibt und die Werthe u und w (in 89) nur Functionen von t, also auch constant sind, so folgt durch Differentiation dieser Gleichung:

$$dv = u\,dm,$$

und wenn man den daraus hervorgehenden Werth von dm in die letzte Gleichung setzt, ergiebt sich die von aussen zuzuführende Wärmemenge auch:

$$dQ = \frac{r}{u}\,dv. \tag{90}$$

Für diese Wärmemenge finden wir nach den früher gegebenen Hauptgleichungen aber auch noch andere Ausdrücke.

Nach Gleichung (I) und (Ia), Capitel I, ist allgemein:

$$dQ = X\,dp + Y\,dv = \frac{X\,dt + C\,dv}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}.$$

Bei vorliegenden Versuchen ist nun aber während der Wärmezuführung p sowohl als t constant, also $dp = 0$ und $dt = 0$ und daher giebt die letzte Gleichung auch:

$$dQ = Y\,dv = \frac{C}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}\,dv \tag{91}$$

und diese ist identisch mit Gleichung (90). Man erhält sonach für die Dämpfe im Maximo die Spannung:

$$Y = \frac{r}{u} \tag{92}$$

und
$$\frac{r}{u} = \frac{C}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}. \tag{93}$$

Gleichung (92) giebt uns also jetzt Aufschluss über die Bedeutung des Werthes Y für gesättigte Dämpfe.

Die Gleichung (93) lässt sich noch weiter vereinfachen. C ist die *Carnot*'sche Temperaturfunction, für die wir in § 15 nach Gleichung (32) fanden:

$$C = A(a + t)$$

und da t nur Function von p ist, so folgt jetzt aus Gleichung (93):

$$\frac{r}{u} = A(a + t)\frac{dp}{dt}. \tag{94}$$

Die Gleichung (93) wurde zuerst von *Clapeyron* gegeben und *Clausius* ertheilte ihr, nachdem er die Bedeutung der *Carnot*'schen Function erkannt hatte, die Form (94). Setzt man in Gleichung (94) statt $a + t$ der Einfachheit wegen T, wobei dieser Werth also nach Früherem die absolute Temperatur bezeichnet, so folgt auch

$$Au = \frac{r}{T\frac{dp}{dt}},$$

oder auf beiden Seiten mit p multiplicirt:

$$Apu = \frac{pr}{T\frac{dp}{dt}} \tag{95}$$

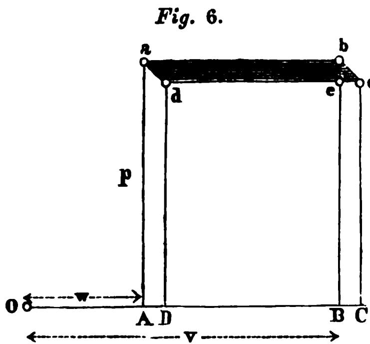
und das ist, wie früher gezeigt wurde, eben nichts Anderes, als die Wärme, welche bei der Erzeugung von 1 Kilogramm Dampf unter constantem Drucke sofort in Arbeit verwandelt wird. Die rechte Seite der Gleichung (95) enthält nur Grössen, die schon bekannt und in Tabelle I in den ersten Columnen angegeben sind; sonach war ich in den Stand gesetzt, die Werthe der Columne 7 zu berechnen.

Gleichung (95) spielt in der Theorie der Dämpfe eine so bedeutungsvolle Rolle, und man wird sie, wenn man erst die Grundsätze der mechanischen Wärmetheorie auch bei

der Berechnung der Dampfmaschinen anwendet, was gewiss bald geschieht, so häufig brauchen, dass es wohl gerechtfertigt ist, wenn ich dieselbe noch auf einem anderen Wege im Folgenden direct entwickele.

Denken wir uns die Gewichtseinheit Wasser von t^0 unter dem Drucke p, und das Volumen w desselben in Figur 6 durch OA, den Druck p durch Aa dargestellt. Dem Wasser führe ich jetzt Wärme zu, so dass dasselbe, sowie der sich bildende Dampf die constante Temperatur t behält. In Folge dessen bleibt auch der Druck p constant, die Curve ab ist also hier eine zur Abscissenaxe parallele Gerade. Die Wärmezuführung werde so lange fortgesetzt, bis alles Wasser in Dampf verwandelt, und das Volumen w in $OB = v$ übergegangen ist. Die zugeführte Wärmemenge sei Q, wobei wir jetzt die Bezeichnung Q im allgemeinen Sinne auffassen, wie dies bei den ähnlichen Betrachtungen in Capitel I geschah. Im vorliegenden Falle ist offenbar:

Fig. 6.



$$Q = r.$$

Diesem Dampfe gestatten wir jetzt eine weitere Ausdehnung von OB auf OC, und zwar sei diese unendlich klein, so dass, da wir dabei weder Wärme zu- noch abführen wollen, die Temperatur um dt und die Spannung um dp, also die Letztere von $Bb = p$ auf $Cc = p - dp$ sinkt. Ob dabei der Dampf gesättigt bleibt oder nicht und was sonst mit ihm geschieht, sei vorläufig gleichgültig. Wir drücken den Dampf jetzt bei der constanten Temperatur $t - dt$ zusammen; dabei bleibt seine Spannung constant: $p - dp$ und es ist, während sich fortwährend Dampf con-

densirt, eine gewisse Wärmemenge Q_1 abzuführen, etwa dadurch, dass, wie wir es uns früher dachten, das Gefäss mit einem Körper K_2 von constanter Temperatur $t-dt$ in Berührung gebracht wird, der die Wärmemenge Q_1 aufnimmt, ohne (etwa wegen seiner Grösse) seine Temperatur dabei zu ändern.

Diese Zusammendrückung werde von OC auf OD fortgesetzt, so zwar, dass wenn der Dampf jetzt vollends ohne Wärmeabführung auf das anfängliche Volumen $OA = w$ zusammengedrückt wird, er in seinen anfänglichen Zustand zurückgekehrt, d. h. ganz in Wasser wieder verwandelt ist.

Der Process wurde gerade so ausgeführt, wie das früher in Capitel I angegeben wurde, so dass auch hier die allgemeine Gleichung:

$$AF = Q\frac{T-T_1}{T},$$

oder wenn wir Gleichung (68), Capitel II, benutzen:

$$AF = Q\frac{t-t_1}{a+t}$$

gültig sein muss. Nun war hier die Temperaturerniedrigung im zweiten Theile der Ausdehnung dt, sonach $t-t_1 = dt$, und da dann auch die Fläche $F = abcd$ unendlich klein ist, so schreiben wir dafür dF, also:

$$AdF = Q\frac{dt}{a+t}.$$

Nun ist aber offenbar der Inhalt des Parallelogrammes $abcd$ bestimmt durch

$$dF = ab.be,$$

oder weil

$$ab = v - w = u$$

ist, und be in der Figur die Spannungsabnahme bedeutet, wenn die Temperatur t um dt sinkt, d. h.

$$be = \frac{dp}{dt}dt$$

und weil ferner hier $Q = r$ ist, so ergiebt sich endlich aus der letzten Gleichung:

$$Au \frac{dp}{dt} = \frac{r}{a+t}$$

genau wie oben nach Gleichung (94), woraus sich dann der Werth Apu bestimmte. Uebrigens stellt das Rechteck $ABba$ die bei der Dampfbildung verrichtete Arbeit dar.

§ 29.

Betrachten wir nun die Werthe von Apu, wie sie in Columne 7, Tabelle I, von 5° zu 5° angegeben sind, so bemerkt man, dass dieselben langsam mit der Temperatur wachsen, die Differenzen der Werthe (Columne 8) nehmen aber mit wachsender Temperatur ab, ein Zeichen, dass Apu nicht gleichmässig mit der Temperatur wächst, wie man im Grunde bis jetzt allgemein annahm. Man setzte nämlich voraus, der Dampf befolge auch im gesättigten Zustande das *Mariotte* und *Gay-Lussac*'sche Gesetz. Wäre sonach v das Volumen der Gewichtseinheit Dampf bei der Spannung p und t seine Temperatur, so sollte nach bisherigen Annahmen die Gleichung (22) Capitel II

$$pv = R(a+t) = RT$$

auch für Dämpfe bestehen, wo R eine für dieselben besonders bestimmte Constante ist.

Nun ist aber das Volumen w der Gewichtseinheit Wasser gegen das Volumen v des Dampfes so klein, dass wir vorübergehend in der früheren Gleichung

$$u = v - w$$

w gegen v vernachlässigen, also $v = u$ setzen können, und dann schreibt man sich die letztere Gleichung auch:

$$Apu = AR(a+t) = ART,$$

d. h. wäre die Annahme richtig, dass sich der gesättigte Dampf wie ein permanentes Gas verhält, so müssten die Differenzen in Columne 8 nahezu gleich gross sein. Die Differenzen nehmen aber so regelmässig ab, besonders von der Temperatur = 40° an, dass wir behaupten müssen:

„die Dämpfe im gesättigten Zustande folgen nicht dem *Mariotte* und *Gay-Lussac*'schen Gesetze.“ Auf dieses Verhalten des Dampfes hat *Clausius* zuerst aufmerksam gemacht.

Obgleich wir nun nach Gleichung (95):

$$Apu = \frac{pr}{T \cdot \frac{dp}{dt}}$$

die Werthe der Columne 7 berechnen können, so ist diese Gleichung doch zur praktischen Verwendung ganz unbrauchbar; denn die auf der rechten Seite vorkommenden Werthe p und $\frac{dp}{dt}$ sind unbekannte Functionen der Temperatur t, und selbst r ist nur durch eine empirische Formel zu bestimmen. Es ist daher absolut erforderlich, eine Gleichung zu besitzen, mittelst welcher sich für jede beliebige Temperatur t, ohne dass die dieser Temperatur entsprechenden Werthe von p, $\frac{dp}{dt}$ und r bekannt zu sein brauchen, der Werth von Apu leicht und sicher berechnen lässt. Aus den Werthen der Columne 7 hätte ich nun leicht eine empirische Formel von folgender Gestalt:

$$Apu = \alpha + \beta t + \gamma t^2$$

ableiten können. Formeln dieser Art sind aber in ihrer Verwendung höchst unbequem und deshalb schien es mir erforderlich, nach einem anderen Ausdrucke zu suchen. Zu anderen Zwecken hatte ich nun die Werthe von *logn.* T von 5^0 zu 5^0 zusammengestellt und bemerkte, dass die Differenzen dieser Werthe ganz genau ein Vielfaches der Differenzen der Columne 8 waren. (Siehe Columne 2 und 3 der Tabelle II.) Ich schloss daraus, dass die gesuchte Gleichung von folgender Form sein müsse:

$$Apu = B \, logn. \frac{T}{n}. \tag{96}$$

worin B und n Constante sind, die ich zu $B = 30{,}456$ und $n = 100$ bestimmte. Ich berechnete dann mittelst dieser Gleichung die Werthe der Columne 13 (Tabelle I).

Die Uebereinstimmung dieser Werthe mit denen der Columne 7 ist, wie besonders aus ihren Differenzen (Columne 15) hervorgeht, auffallend. Innerhalb der weiten Temperaturgrenzen 0° bis 200° sind nur zwischen 0° bis 15° die Differenzen etwas grösser, als im Weiteren. Dies hat jedoch seinen Grund in den Werthen der Columne 7; dass diese bei geringeren Temperaturen nicht ganz sicher sind, zeigen die Differenzen in Columne 8, sowie auch die in Columnen 10 und 12, die erst etwa von 40° an regelmässig werden. Diese Unsicherheit hat wieder ihren Grund darin, dass hier schon kleine Fehler in den *Regnault*'schen Werthen von p, besonders aber in den Werthen von $\frac{dp}{dt}$ auf die Werthe von Apu von starkem Einflusse sind.

Nach allem diesen und mit Rücksicht auf den Wechsel der Vorzeichen der Differenzen in Columne 15 möchte man fast schliessen, dass die Gleichung (96) das wirkliche Gesetz der Beziehungen zwischen p, u und t darstellt, wenigstens lässt sich behaupten, dass diese Gleichung das Verhalten des gesättigten Dampfes mit gleicher Genauigkeit, vielleicht schärfer darstellt, wie die Gleichung:

$$pv = R(a + t)$$

das der permanenten Gase, wenn man bedenkt, dass sie für Spannungen von 0,006 bis 15,4 Atmosphären das Verhalten des Dampfes genau darlegt.

§ 30.

Statt der Gleichung (95) werden wir nun in der Folge zur Berechnung der bei der Bildung des Dampfes in Arbeit verwandelten Wärme die Gleichung (96) benutzen.

Die letztere Gleichung setzt uns zunächst in den Stand, den Werth von u für verschiedene Temperaturen zu berechnen. Man erhält nämlich:

$$u = \frac{B\,logn.\,\frac{T}{n}}{Ap}$$

und wenn man die Werthe von $B\,logn.\frac{T}{n}$ nach Columne 13 (Tabelle I) benutzt, und ferner $A = \frac{1}{424}$ einsetzt:

$$u = 424\,\frac{(Apu)}{p}, \tag{97}$$

oder wenn p in Millimeter Quecksilbersäulen eingesetzt werden soll:

$$u = 31{,}1826\,\frac{(Apu)}{p}. \tag{98}$$

Nach dieser Gleichung sind die Werthe der Columne 4 (Tabelle II) berechnet. Nun war aber nach Gleichung (85)

$$u = v - w$$

und daraus folgt das Volumen der Gewichtseinheit (1 Kilogr.) des gesättigten Dampfes

$$v = u + w, \tag{99}$$

wobei w das Volumen von 1 Kilogr. Wasser von gleicher Temperatur t ist.

Für w kann man unbedenklich den Werth 0,001 Cubikmeter setzen. Zwar giebt dieser Werth das Volumen des Wassers bei 0°, und das Volumen bei höheren Temperaturen ist jedenfalls grösser, die Differenz ist aber sicher ausserordentlich klein und zu vernachlässigen. Die bis jetzt bekannten Versuche geben über die Ausdehnung des Wassers unter vorliegenden Verhältnissen gar keinen Aufschluss. Die bekannten Formeln von *Kopp*, *Frankenheim* u. A. geben die Vergrösserung des Volumens der Gewichtseinheit Wasser für Erwärmung unter constantem und zwar atmosphärischem Drucke, während im vorliegenden Falle das Wasser unter einem meist stärkeren und zwar dem Drucke steht, der der Spannung des darüber befindlichen Dampfes von gleicher Temperatur entspricht. Im Allgemeinen wird daher wohl bei höheren Temperaturen das Volumen w des Wassers geringer sein, als man aus den ge-

nannten Versuchen schliessen würde, und dieser Umstand begünstigt unsere Annahme.

In Columne 5 (Tabelle II) sind die Werthe von v angegeben, die ich unter Benutzung von Gleichung (99) erhielt und Columne 6 giebt nach der Gleichung

$$\gamma = \frac{1}{v}$$

berechnet, die Dichtigkeit oder das Gewicht von 1 Cubikmeter Dampf für die Temperaturen von 5° zu 5°. Bisher berechnete man das Volumen und die Dichtigkeit des Dampfes immer unter der Voraussetzung, dass derselbe auch im gesättigten Zustande dem *Mariotte* und *Gay-Lussac*'schen Gesetze folge. Um zu zeigen, wie sich die Resultate dieser Rechnung gegen die verhalten, welche die mechanische Wärmetheorie liefert, wurden der Tabelle II noch die Columnen 8 und 9 beigefügt.

Für atmosphärische Luft fanden wir nämlich:

$$pv = R(a + t),$$

wobei nach den neuesten Versuchen *Regnault*'s $R = 29{,}272$ zu setzen war. Nennen wir nun ε das specifische Gewicht des Dampfes in Hinsicht der Luft (beide bei gleicher Temperatur und Spannung genommen) so würde, wenn der Dampf ebenfalls dem *Mariotte* und *Gay-Lussac*'schen Gesetze folgte, für diesen die Gleichung

$$pv = \frac{R}{\varepsilon}(a + t) = \frac{R}{\varepsilon}T$$

bestehen. Nun soll man nach den Versuchen von *Gay-Lussac* $\varepsilon = 0{,}6225$ annehmen, und sonach bestände für den Wasserdampf die Gleichung:

$$pv = 47{,}023\, T \tag{100}$$

und daraus würde folgen, wenn man p in Millimeter Quecksilber einführt, das Volumen der Gewichtseinheit Dampf:

$$v = 3{,}4582 \frac{T}{p} \tag{101}$$

und umgekehrt seine Dichtigkeit

$$\gamma = \frac{1}{v}.$$

Nach diesen Formeln sind die Columnen 8 und 9 berechnet.

Vergleichen wir nun die Werthe der Columnen 6 und 9 (Tabelle II), welche die Dichtigkeit γ des Dampfes geben, das eine Mal berechnet nach den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie, das andere Mal unter Voraussetzung, dass das *Mariotte* und *Gay-Lussac*'sche Gesetz auch für gesättigte Dämpfe gilt, so bemerkt man, dass für Temperaturen von 0^0 bis 50^0 beide Methoden fast gleiche Werthe geben, dass aber von da an die Werthe von Columne 6 schneller wachsen, als die von Columne 9. Man muss daraus schliessen, dass die bisher benutzten Formeln die Dichtigkeit des Dampfes um so unrichtiger geben, je höher seine Temperatur, also auch seine Spannung, ist, und dass bei genauen Untersuchungen unbedingt die Annahme unzulässig ist, dass der Dampf auch im gesättigten Zustande dem *Mariotte* und *Gay-Lussac*'schen Gesetze folge. Das vorstehende Resultat wäre auch aus unserer Gleichung (96):

$$Apu = B\,logn.\frac{T}{n}$$

unmittelbar zu entnehmen gewesen.

Der Werth

$$logn.\frac{T}{n} = logn.(a+t) - logn.\,n$$

lässt sich nämlich annäherungsweise unter der Voraussetzung, dass t sehr klein ist, also die Temperatur des Dampfes nur wenig von 0^0 abweicht, bestimmen, und zwar dadurch, dass man $logn.(a+t)$ nach folgender bekannten Reihe entwickelt:

$$logn.(a+t) = logn.\,a + 2\left[\left(\frac{t}{2a+t}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{t}{2a+t}\right)^3 + \cdots\right].$$

Vernachlässigt man wegen der Kleinheit von t gegen a alle Glieder von höherer als der ersten Potenz und t gegen $2a$, so folgt:

$$logn.(a+t) = logn.\,a + \frac{t}{a}$$ und sonach:

$$logn.\frac{T}{n} = logn.\,a - logn.\,n + \frac{t}{a} = 1{,}0042 + \frac{t}{a}$$

und dieser Werth in die obige Gleichung gesetzt, giebt, wenn wir noch annähernd 1 statt 1,0042 schreiben:

$$A p u = \frac{B}{a} (a + t),$$

welche Gleichung genau das *Mariotte* und *Gay-Lussac*'sche Gesetz ausspricht, weil wir unbedenklich v statt u setzen können. Da die angegebenen Vernachlässigungen nur unter der Voraussetzung gestattet sind, dass t sehr klein ist, so erklärt sich hieraus also vollkommen, dass für geringe Temperaturen beide Wege nahezu zu gleichen Resultaten führen, dass aber dann die Abweichungen der Werthe der Columnen 6 und 9 mit wachsender Temperatur immer grösser werden.

Die vorstehende Entwickelung zeigt zugleich, dass man innerhalb gewisser Temperaturgrenzen die Gleichung (96) annähernd immer in der Form:

$$A p u = \alpha + \beta t$$

anwenden kann, d. h. mit anderen Worten, man kann das *Mariotte* und *Gay-Lussac*'sche Gesetz innerhalb solcher Grenzen als richtig ansehen, wenn man nur die Werthe α und β entsprechend bestimmt.

In der Folge werde ich daher für Dampfspannungen, wie sie bei Dampfmaschinen vorkommen, von folgender Formel Gebrauch machen:

$$A p u = 32{,}28 + 0{,}0776\, t, \qquad (102)$$

und dass man sich innerhalb der gegebenen Grenzen dieser Formel bedienen kann, zeigt folgende Zusammenstellung:

Temperatur des Dampfes.	Apu Nach Gleich. (102).	Apu Nach Gleich. (96).	Differenzen.
50	36,16	35,71	+ 0,45
75	38,10	37,98	+ 0,12
100	40,04	40,09	—0,05
125	41,98	42,06	—0,08
150	43,92	43,92	. 0,00
175	45,86	45,67	+ 0,19
200	47,80	47,32	+ 0,48.

Man erkennt daraus, dass für die Dämpfe von 100° bis 150° und das sind gerade diejenigen, mit denen man es bei der Dampfmaschine zu thun hat, die Näherungsformel (102) vollständig genügt und dass selbst noch über diese Gränzen hinaus, etwa von 60° bis 180° die Abweichungen gering ausfallen werden. Durch Gleichsetzen der Ausdrücke (96) und (102) gewinnt man dann zugleich für die angegebenen Gränzen noch einen Näherungsausdruck für *logn.* T und zwar:

$$logn.\ T = 5{,}6650 + 0{,}00255\,t \qquad (103)$$

einen Ausdruck, den man ebenfalls in der Praxis nützlich verwenden kann. Bei genauern Untersuchungen bedienen wir uns aber der richtigen Formel (96).

§ 31.

Kehren wir nun nochmals zur Betrachtung der Tabelle I zurück.

Die Gesammtwärme Q, die erforderlich ist, um 1 Kilogr. Wasser von 0° erst bis t° zu erwärmen, und dann dasselbe unter constantem, der Temperatur t entsprechendem, Drucke p in Dampf zu verwandeln, war nach *Regnault*'s empirischer Formel:

$$Q = 606{,}5 + 0{,}305\,t.$$

Subtrahiren wir davon die Wärmemenge, die dabei sofort in Arbeit verwandelt wird, nach Gleichung (96), so ergiebt sich die von der ganzen zugeführten Wärme im Dampf zurückgebliebene Wärmemenge, oder wie wir es bezeichnet haben, die im Dampfe enthaltene Wärme:

$$J = 606{,}5 + 0{,}305\,t - B\ logn.\ \frac{T}{n}. \qquad (104)$$

Regnault bezeichnet seine Formel selbst als eine provisorische, so dass Zweifel, ob diese Formel die Wärmemenge ganz genau darstellt, um so weniger auffallen können. Bedenkt man, dass nach den Anschauungen der mechanischen Wärmetheorie, aus Wasser von 0° auf unendlich viel verschiedene Arten, Dampf von t° erzeugt

werden kann, und dass in jedem Falle die von aussen zuzuführende Wärmemenge eine andere ist, so erscheint es doch zweifelhaft, dass gerade bei dem von *Regnault* gewählten Verfahren die zuzuführende Wärmemenge so einfach mit der Temperatur wachsen soll, wie es seine Formel ausspricht; es erscheint mir weit wahrscheinlicher, dass die im Dampf enthaltene Wärme J in dieser Weise mit der Temperatur wächst, also statt obiger Formel zu schreiben wäre:

$$J = \alpha + \beta t,$$

wobei α und β noch zu bestimmende Constanten sind. Wenn diese letztere Annahme gestattet wäre, so wäre das ein grosser Gewinn für die weitere Ausbildung der mechanischen Wärmetheorie, denn der Werth J spielt hier eine weit wichtigere Rolle, als die Wärmemenge Q, die man dem Wasser zuführen muss, um es unter der ganz speciellen Voraussetzung, unter der *Regnault*'s Formel gilt, in Dampf zu verwandeln; J giebt die im Dampfe enthaltene Wärmemenge an, welches auch die Entstehungsweise desselben war.

Ich habe auf Grund der *Regnault*'schen Versuche für die im Dampfe enthaltene Wärme gefunden:

$$J = 573{,}34 + 0{,}2342\, t. \qquad (105)$$

Addirt man hierzu die Wärmemenge, welche bei der Bildung unter constantem Drucke (*Regnault*'s Verfahren) sogleich in Arbeit verwandelt wird, so ergiebt sich die Gesammtwärme:

$$Q = 573{,}34 + 0{,}2342\, t + B\, logn. \frac{T}{n}. \qquad (106)$$

Dass dieser Ausdruck gleich gut mit den Versuchen übereinstimmt, zeigt folgende Zusammenstellung:

Temperatur des Dampfes.	Gesammtwärme Q. Nach *Regnault*'s Versuchen.	Nach *Regnault*'s Formel (77).	Nach Gleichung (106)
63°	625,00	625,2	625,00
100°	636,67	637,0	636,85
195°	666,00	665,97	666,00

Diese drei Versuche sind es, aus denen *Regnault* seine Formel ableitet*). Wären die drei Versuchswerthe ganz genau richtig, so müsste man behaupten, dass die nach Gleichung (106) berechneten Werthe besser damit übereinstimmen, als die nach *Regnault*'s Formel berechneten. Jedenfalls wird man zugeben, dass hiernach unser für J gegebener Ausdruck mit gleicher Sicherheit in Anwendung gebracht werden kann, wie das mit *Regnault*'s Gleichung für Q der Fall ist; und dass man in der mechanischen Wärmetheorie, wo gerade der Werth von J häufigere Anwendung findet, die einfachere Formel (105) der Gleichung (104) vorziehen wird.

Regnault nimmt zwar zum Beweise, dass seine Gleichung für Q befriedigend stimmt, auch noch den Versuchswerth $Q = 610{,}0$ für die Temperatur $t = 10^{0}$ aus den Versuchstabellen und für diese Temperatur giebt seine Formel $Q = 609{,}6$, während Gleichung (106) $Q = 607{,}86$ ergiebt; sonach scheint die letztere Gleichung für geringere Temperaturen stark von den Versuchsresultaten abweichende Werthe zu geben.

Betrachtet man aber die Reihe der Versuchswerthe, welche *Regnault***) für geringe Spannungen, d. h. für Temperaturen in der Nähe von 0^{0} fand, so findet man auffallend starke Differenzen selbst bei solchen Versuchen, die unter fast gleichen Verhältnissen ausgeführt wurden, während die Resultate der bei höheren Temperaturen ausgeführten Versuche unter einander weit besser übereinstimmen ***). Diese Erscheinung deutet an, dass die Versuche bei niedrigen Temperaturen schwieriger auszuführen waren; sie scheint aber auch darauf hinzudeuten, dass der Werth von Q bei geringeren Temperaturen s i c h s t ä r k e r m i t d e r T e m-

*) Relations des expériences etc. p. 726.

**) A. a. O. p. 721. Tabelle IV.

***) *Regnault* selbst hebt den Werth $Q = 610{,}0$ aus seinen Versuchstabellen nicht als unbedingt, sondern nur als „wohl nahezu“ richtig hervor.

peratur ändert, als dies *Regnault's* Formel andeutet und dass sonach gerade hier geringe Abweichungen in dem Versuchsverfahren auf stärkere Schwankungen in den Resultaten führen musste. Diese eben angegebene Eigenschaft von Q ergiebt aber auch Gleichung (106), und sonach lässt sich kein erheblicher Einwurf erwarten, wenn wir bis auf Weiteres zur Berechnung der im Dampf enthaltenen Wärme J die einfachere Gleichung (105) verwenden. In den Fällen, wo es auf die Bestimmung der Gesammtwärme Q für mittlere und höhere Temperaturen ankommt, wie dies durchgängig bei der Berechnung der Dampfmaschinen der Fall ist, könnten auch wir die von *Regnault* gegebene Formel anwenden, da unter dieser Voraussetzung die Ergebnisse der Gleichungen (106) und (77) kaum verschieden sind; ich werde jedoch auch in der Folge die Gesammtwärme stets nach der Gleichung:

$$Q = J + Apu$$

berechnen; dabei für J den Werth der Gleichung (105) und für Apu entweder die genauere Formel (96) oder für mittlere Dampfspannungen die Annäherungsformel (102) verwenden.

§ 32.

Unterwerfen wir nun auch den Werth r (Columne 6, Tabelle I), welcher die Verdampfungswärme giebt, einer nähern Betrachtung.

Diese Wärmemenge r, die man also einem Kilogr. Wasser von der Temperatur t zuführen muss, um es unter constantem Drucke p in Dampf von t^0 zu verwandeln, ist

$$r = Q - W,$$

wo Q die Gesammtwärme und W die Wärmemenge bezeichnet, welche man dem Wasser von 0^0 zuführen muss, um es unter dem der Temperatur t entsprechenden Dampfdrucke p erst bis t^0 zu erwärmen. Ist sonach c die speci-

fische Wärme des Wassers bei constantem Drucke, so ist, wie schon Gleichung (79) ergab:

$$W = \int_0^t c\,dt$$

und daraus folgte durch Benutzung des Werthes von c, wie ihn *Regnault* giebt, nach Gleichung (81)

$$W = t + 0{,}00002\,t^2 + 0{,}000\;000\;3\,t^3.$$

Diese Gleichung von *Regnault* lässt sich aber viel einfacher durch folgende ersetzen:

$$W = 1{,}100\,t - B\,logn.\,\frac{T}{273} \text{ oder}$$

$$W = 30{,}59 + 1{,}100\,t - B\,logn.\,\frac{T}{n},$$

wobei B und n genau dieselben Werthe haben, wie in Gleichung (96); überhaupt repräsentirt das letzte Glied vollständig die bei der Verdampfung unter der Temperatur t in Arbeit verwandelte Wärme; so dass sich auch schreibt:

$$W = 30{,}59 + 1{,}100\,t - Apu. \tag{107}$$

Dass diese Gleichung ebenso genau mit den Versuchen von *Regnault* wie dessen Gleichung (81) stimmt, zeigt folgende Tafel:

	W		
	Nach *Regnault*		
Temperatur	Versuch	Nach Gleich. (81)	Nach Gleich. (107)
0	0	0	0
50	—	50,09	49,98
100	100,50	100,50	100,50
150	—	151,46	151,67
200	203,20	203,20	203,27

die Differentiation von Gleichung (107) würde dann für die specifische Wärme des Wassers geben

$$c = \frac{dW}{dt} = 1{,}100 - \frac{B}{T}. \tag{108}$$

Schon oben habe ich in einer Anmerkung hervorgehoben, dass man nach der Art und Weise, wie *Regnault* die Versuche ausführte, schliessen möchte, dass vorstehender Werth nicht die specifische Wärme des Wassers bei constantem Drucke darstellt, weil obiger Werth von W den Versuchen gemäss, die bei der Temperatur t im Wasser enthaltene Wärme giebt und diese streng genommen vom Standpunkte der mechanischen Wärmetheorie aus verschieden ist von derjenigen, die man dem Wasser zuführen muss, um es unter constantem Drucke von 0^0 auf t^0 zu erwärmen. Aus schon bemerkten Gründen sind die Differenzen aber jedenfalls so gering, dass man bis auf Weiteres annehmen kann, die Formel (81) von *Regnault* oder Gleichung (107) geben genau die specifische Wärme des Wassers bei constantem Drucke*).

---

*) Wenn Gleichung (107) für W wirklich, wie erwähnt wurde, nur die bei der Temperatur t im Wasser enthaltene Wärme giebt, so ist auffallend, dass sie der Form nach genau mit Gleichung (104) übereinstimmt, welche die im Dampfe enthaltene Wärme nach *Regnault* darstellt. Die Gleichung (107) schreibt sich übrigens auch:

$$W = \alpha + 1{,}100\,t - B\,logn.\,\frac{T}{n_1},$$

wo α und n_1 noch zu bestimmende Constanten wären. Wollte man nun schliessen, dass analog den Erscheinungen beim Dampfe das letzte Glied $B\,logn.\,\frac{T}{n_1}$ auch hier die Wärmemenge wäre, welche sofort in Arbeit verwandelt wird, wenn das Wasser unter constantem der Temperatur t entsprechendem Dampfdruck p von 0^0 auf t^0 erwärmt wird und wollte man die von *Regnault* bestimmte Wärme W als die im Wasser enthaltene Wärme betrachten, so wäre dann die während der Erwärmung des Wassers von aussen zuzuführende Wärme:

$$Q = \alpha + 1{,}100\,t$$

und daher die wahre specifische Wärme des Wassers bei constantem Drucke:

$$c = \frac{dQ}{dt} = 1{,}100;$$

also dieser Werth constant und etwas grösser als 1.

Setzen wir nun in die Gleichung:

$$r = Q - W,$$

den oben gegebenen Werth von Q nämlich:

$$Q = J + Apu = 573{,}34 + 0{,}2342\,t + Apu$$

und den Werth von W nach (107) ein, so folgt

$$r = 542{,}75 - 0{,}8658\,t + 2\,.\,Apu, \qquad (108)$$

oder wenn wir statt des genauen Werthes von Apu nach Gleichung (96) für mittlere Temperaturen den Näherungswerth nach Gleichung (102) verwenden:

$$r = 607{,}31 - 0{,}7106\,t. \qquad (109)$$

Diese Gleichung, die wir unter der bemerkten Voraussetzung künftig anwenden werden, unterscheidet sich von der von *Clausius* gegebenen nur durch etwas andere Constanten.

Ferner findet sich jetzt auch die innere latente Dampfwärme, d. h. die Wärmemenge, die in 1 Kilogr. Dampf mehr enthalten ist, als im gleichen Gewicht Wasser von gleicher Temperatur, nach Gleichung (87)

$$\varrho = r - Apu,$$

oder unter Benutzung von Gleichung (108)

$$\varrho = 542{,}75 - 0{,}8658\,t + Apu \qquad (110)$$

und näherungsweise für mittlere Temperaturen

$$\varrho = 575{,}03 - 0{,}7882\,t. \qquad (111)$$

Setzen wir endlich den Näherungswerth für Apu nach Gleichung (102) auch in Gleichung (107) ein, so folgt die Wärmemenge, die erforderlich ist ein Kilogr. Wasser von 0^0 auf t^0 zu erwärmen:

$$W = -1{,}69 + 1{,}0224\,t,$$

oder im Mittel für mittlere Temperaturen die specifische Wärme des Wassers:

$$c = \frac{dW}{dt} = 1{,}0224. \qquad (112)$$

Nachdem im Vorstehenden auf Grund der hierüber bekannten Versuche für die verschiedenen, hier zunächst in

Frage kommenden Wärmemengen diejenigen Formeln entwickelt wurden, von denen man bei weiteren Untersuchungen Gebrauch zu machen hat, kann nun zu speciellen Beispielen übergegangen werden.

§ 33.

Sämmtliche Aufgaben, die hier überhaupt vorkommen können, lassen sich kurz in folgender Weise zusammenfassen: Man denke sich einen Dampfcylinder, in welchem Dampf und Wasser befindlich ist; und zwar sei das Gewicht des Dampfes m, das des Wassers $M - m$, also das Gewicht von beiden M. Beide haben die Temperatur t und der Dampf hat, da er hier gesättigt ist, die von t abhängige Spannung p. Diese Masse können wir comprimiren oder sich ausdehnen lassen und ihr dabei zugleich Wärme von aussen zuführen oder ihr solche entziehen. Die Compression oder Ausdehnung kann ferner ohne Zu- oder Abführung von Wärme stattfinden oder das Gesammtvolumen kann während der Wärmezuführung oder Wärmeabführung constant erhalten werden. Die von aussen erfolgende Erwärmung oder Abkühlung kann ferner, ebenso wie die Compression oder Ausdehnung nach bestimmt vorgeschriebenen Gesetzen erfolgen; kurz es lassen sich unendlich viele Probleme aufstellen; in jedem einzelnen ist aber fast immer die Hauptfrage nach dem Verhalten der Masse von Wasser und Dampf im Gefässe während der angedeuteten Operationen und besonders nach ihrem Endzustande. Die Beantwortung dieser Fragen nach den Gesetzen der mechanischen Wärmetheorie ist, wie das Folgende zeigen wird, selten mit Schwierigkeiten verknüpft, nur ist es zweckmässig, die Hauptgleichungen in Capitel I zum Gebrauch bei Untersuchung des Verhaltens des gesättigten Dampfes erst in eine bequeme Form zu bringen.

Nach der vorhin angegebenen Bezeichnung ist die im Wasser enthaltene Wärme:

$$(M - m)\int_0^t c\,dt = (M - m)\,W$$

und die im Dampfe enthaltene:

$$mJ;$$

sonach die in der ganzen Masse enthaltene Wärme:

$$MW + m(J - W).$$

Nun ist aber $J - W$ nichts anderes, als die der Temperatur t entsprechende innere latente Wärme ϱ und sonach folgt einfacher die in der Masse enthaltene Wärme:

$$MW + m\varrho.$$

War nun im Anfange irgend eines beliebigen Versuches die Dampfmenge m_1 und die Temperatur t_1 und sind W_1 und ϱ_1 die zugehörigen Werthe von W und ϱ; ist dann am Ende des Versuches die Dampfmenge m_2 und t_2 die Temperatur und bezeichnen wir die zugehörigen Werthe von W und ϱ mit W_2 und ϱ_2, so folgt die in der ganzen Masse M enthaltene Wärme

im Anfange $MW_1 + m_1\varrho_1$
am Ende $MW_2 + m_2\varrho_2$,

sonach die Zunahme der inneren Wärme, die wir mit ΔU bezeichnen:

$$\Delta U = M(W_2 - W_1) + (m_2\varrho_2 - m_1\varrho_1). \qquad (113)$$

Fällt der Werth dieses Ausdruckes in einem bestimmten Falle negativ aus, so giebt er die Abnahme der inneren Wärme an.

Geht man zum Differential über, so folgt die Zunahme der inneren Wärme der ganzen Masse

$$dU = M\frac{dW}{dt}dt + d(m\varrho),$$

oder weil $\frac{dW}{dt}$ die specifische Wärme des Wassers ist:

$$dU = Mc\,dt + d(m\varrho). \qquad (114)$$

Das ist eine der Hauptgleichungen für Dämpfe und zwar gilt diese Geichung für alle Fälle.

Aus ihr leitet sich nun sofort eine andere ebenfalls wichtige Gleichung ab.

Nach früheren Sätzen § 27, Gleichung 87 war nämlich auch:

$$\varrho = r - Apu,$$

sonach ist nach (114), wenn dieser Werth von ϱ eingesetzt wird:

$$dU = Mc\,dt + d(mr) - d(m\,.\,Apu).$$

Nun schreibt sich aber nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung:

$$d(m\,.\,Apu) = Amu\,dp + Ap\,d(mu)$$
$$= Amu\frac{dp}{dt}dt + Ap\,d(mu)$$

und diesen Werth in die Gleichung für dU substituirt, giebt:

$$dU = Mc\,dt + d(mr) - Amu\frac{dp}{dt}dt - Ap\,d(mu).$$

Ferner galt für die gesättigten Dämpfe nach Gleichung (94) die Beziehung:

$$\frac{r}{u} = AT\frac{dp}{dt},$$

woraus folgt:

$$Au\frac{dp}{dt} = \frac{r}{T}$$

und daher giebt die letzte Gleichung für dU nach einer leichten Umformung:

$$dU + Ap\,d(mu) = Mc\,dt + d(mr) - \frac{mr}{T}dt. \qquad (115)$$

Diese Gleichung hat eine wichtige Bedeutung. Geht nämlich der Kolben im Cylinder während der Operation um dv zurück, so verrichtet der Dampf eine Arbeit, welche der Wärmemenge

$$Ap\,dv$$

entspricht. Nun ist aber nach Gleichung (88) das Volumen der ganzen Masse

$$v = mu + Mw$$

und sonach, da M constant ist und w das Volumen der

Gewichtseinheit Wasser als constant angesehen werden kann, durch Differentiation:

$$dv = d(mu),$$

sonach die in Arbeit verwandelte Wärme allgemein

$$Ap\,d(mu).$$

Man erkennt daraus, dass die linke Seite der Gleichung (115) nichts anderes giebt, als die Summe des Wachsthumes der inneren Wärme und der dabei in äussere Arbeit verwandelten Wärme, und das ist eben die während dieses Wachsens von aussen zugeführte Wärme dQ. Daher folgt nach Gleichung (115):

$$dQ = Mc\,dt + d(mr) - \frac{mr}{T}\,dt. \qquad (116)$$

Diese Gleichung kann als die zweite Hauptgleichung für Dämpfe betrachtet werden, wenn sie auch, wie dann näher ausgesprochen werden soll, nicht in allen Fällen in Anwendung gebracht werden darf.

Dem Vorstehenden lässt sich eine dritte Gleichung beifügen und zwar eine solche, welche die in Arbeit verwandelte Wärme anders darstellt, als die oben gegebene

$$Ap\,d(mu).$$

Bezeichnet man diese Wärme mit dL, so folgt zunächst:

$$dL = Ap\,d(mu)$$

und daraus:

$$dL = A\,d(mpu) - Amu\frac{dp}{dt}\,dt,$$

oder nach weiterer Umformung zugleich mit Rücksicht auf Gleichung (94):

$$dL = (Apu)\,dm + m\,d(Apu) - \frac{mr}{T}\,dt. \qquad (117)$$

Nach Gleichung (96) ist aber:

$$Apu = B\,logn.\frac{T}{n}.$$

und durch Differentiation, weil $T = a + t$, also $dT = dt$ ist:

$$d(Apu) = \frac{B}{T}\,dt,$$

daher nach Gleichung (117) auch:

$$dL = B\,logn.\frac{T}{n}\,dm - \frac{m(r-B)}{T}\,dt. \tag{118}$$

Die im Vorstehenden gegebenen drei Hauptgleichungen für gesättigte Dämpfe sollen im Folgenden zusammengestellt und dann mag durch specielle Beispiele ihre Brauchbarkeit nachgewiesen werden.

Die Veränderung der inneren Wärme der Masse von Dampf und Wasser war:

$$\mathbf{dU = Mcdt + d(m\varrho).} \tag{IV}$$

Die von aussen zugeführte Wärme war:

$$\mathbf{dQ = Mcdt + d(mr) - \frac{mr}{T}\,dt.} \tag{V}$$

Die in äussere Arbeit verwandelte Wärme:

$$\mathbf{dL = Apd(mu) = B\,logn.\frac{T}{n}\,dm - \frac{m(r-B)}{T}\,dt.} \tag{VI}$$

Von diesen drei Gleichungen ist ohne Weiteres nur die erstere integrabel und diese gilt auch unter allen Umständen. Bei den beiden anderen hingegen ist die Integration nur ausführbar, wenn noch eine andere Beziehung zwischen einzelnen hier in Frage kommenden Grössen gegeben ist, und dann ist noch ausdrücklich hervorzuheben, dass diese Gleichungen (V) und (VI) **nur** dann in Anwendung gebracht werden dürfen, wenn die Masse während des ganzen Processes unter einem äusseren Drucke steht, der ihrer Spannung fortwährend gleich ist; denn unter dieser Voraussetzung sind die Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie in Capitel I entwickelt worden.

Die folgende Behandlung einer Reihe von Problemen wird die Bedeutung und die Art und Weise der Verwendung vorstehender Gleichungen näher darlegen.

§ 34.

Problem I.

„In einem Dampfcylinder befinden sich m_1 Kilogr. Dampf und $(M-m_1)$ Kilogr. Wasser, beide von der Temperatur t_1. Die Masse soll sich langsam ausdehnen und zwar soll der vom Dampfe am Kolben zu überwindende Druck in jedem Momente der entsprechenden Dampfspannung gleich sein; die Temperatur der Masse sinkt dann von t_1 auf t_2 und die Spannung von p_1 auf p_2. Welche Arbeit verrichtet der Dampf und welche Wärmemenge muss von aussen zu- oder abgeführt werden, damit die Dampfmenge m_1 constant bleibe, also sich während der Expansion weder Dampf niederschlage, noch Wasser verdampfe?“

Die Aufgabe setzt voraus, dass der Gegendruck am Kolben in jedem Momente der Dampfspannung gleich ist, wir sind sonach berechtigt, die Gleichungen (V) und (VI) hier in Anwendung zu bringen. Dieser Fall tritt übrigens bei Dampfmaschinen sicher immer ein, denn dort findet die Expansion oder das Zurückgehen des Kolbens verhältnissmässig so langsam statt, dass der Dampf zu folgen vermag und sonach immer mit dem vollen seinem Volumen und seiner Temperatur entsprechenden Drucke wirkt.

Das Problem verlangt nun, dass während der Expansion, wobei die Temperatur der Masse von t_1 auf t_2 sinkt, die Dampfmenge constant bleibe, es ist sonach $dm=0$, und daher giebt Gleichung (VI) sofort die in Arbeit verwandelte Wärme:

$$L=-m_1\int_{t_1}^{t_2}\frac{r-B}{T}\,dt.$$

Nun ist aber nach Gleichung (109) für mittlere bei Dampfmaschinen vorkommende Temperaturen r gegeben, und zwar:

$$r=607{,}31-0{,}7106\,t.$$

Ferner ist $T = 273 + t$,

und daher giebt die Integration der vorstehenden Gleichung für L:

$$L = m_1 \left\{ 770{,}864 \, logn. \frac{a + t_1}{a + t_2} - 0{,}7106 (t_1 - t_2) \right\}. \quad (119)$$

Für solche bei Dampfmaschinen vorkommende Fälle, also für mittere Temperaturen, kann man aber nach Gleichung (103) setzen:

$$logn. (a + t) = 5{,}6650 + 0{,}00255 \, t,$$

und dann schreibt sich Gleichung (119) weit einfacher:

$$L = 1{,}2551 \, m_1 (t_1 - t_2). \quad (120)$$

Das ist also die Wärmemenge, welche in äussere Arbeit verwandelt wird, wenn bei constanter Dampfmenge m_1 die Expansion so weit fortgesetzt wird, dass die Temperatur von t_1 auf t_2 sinkt.

Es fragt sich nun ferner, welche Wärmemenge Q der Masse von aussen zu- oder abgeführt werden muss, damit eben die Bedingung, die Dampfmenge bleibe constant, erfüllt werde.

Zu diesem Zwecke bestimmt man zunächst am besten nach Gleichung (IV) die Zunahme der inneren Wärme; man erhält durch Integration dieser Gleichung, mit Rücksicht darauf, dass m_1 constant ist, diese Zunahme, die mit U bezeichnet werden mag:

$$U = M \int_{t_1}^{t_2} c \, dt + m_1 (\varrho_2 - \varrho_1).$$

Nun ist aber für mittlere, bei Dampfmaschinen vorkommende Temperaturen die specifische Wärme des Wassers constant und zwar nach Gleichung (112):

$$c = 1{,}0224$$

zu setzen, und ferner ist für die gleichen Verhältnisse nach Gleichung (111):

$$\varrho_2 - \varrho_1 = 0{,}7882 (t_1 - t_2),$$

und daher ergiebt sich für die Zunahme der inneren Wärme während der Expansion nach leichter Umformung:

$$U = (0{,}7882\, m_1 - 1{,}0224\, M)(t_1 - t_2). \tag{121}$$

Da M immer grösser als m_1, oder wenigstens gleich m_1 ist, so folgt daraus, dass, wenn in Folge der Expansion die Temperatur von t_1 auf t_2 sinkt, der Werth von U immer negativ ist, d. h. die innere Wärme nimmt während der Expansion unter der gemachten Voraussetzung stets ab.

Ob aber die verschwundene innere Wärme gerade der in Wärme ausgedrückten äusseren Arbeit entspricht, ist eine andere Frage, die sich jedoch leicht beantwortet.

Die Wärmemenge Q nämlich, die von aussen unter den gegebenen Bedingungen zugeführt werden muss, ist offenbar gleich der Summe des Wachsthums der inneren Wärme und der in äussere Arbeit verwandelten Wärme, d. h.

$$Q = U + L,$$

oder unter Benutzung von Gleichungen (120) und (121):

$$Q = (2{,}0433\, m_1 - 1{,}0224\, M)(t_1 - t_2), \tag{122}$$

welche Gleichung auch direct durch Integration der Gleichung (V) hätte gefunden werden können.

Die Aufgabe ist sonach gelöst; zwar gelten die vorstehenden Gleichungen zunächst nur für die in § 30 näher angedeuteten Temperaturgrenzen, diese Voraussetzung schliesst aber alle praktisch wichtigen Fälle in sich. Die im Vorstehenden ausgeführten Integrationen hätten leicht auch unter Zugrundelegung der genauen Werthe von c, r, ϱ u. s. w. vorgenommen werden können, doch sind die daraus hervorgehenden Gleichungen wenig übersichtlich und gewähren vielleicht keine grössere Genauigkeit. Ich glaube, unsere bis jetzt auf Versuche gegründete Kenntniss des Verhaltens der Dämpfe ist der Art unsicher und schwankend, besonders ausserhalb der in § 30 angegebenen Temperaturgrenzen, dass man für jetzt die oben auf Näherungswegen gewonnenen Ausdrücke unbedenklich allgemein anwenden darf.

Nehmen wir zunächst den einfacheren Fall an, dass im Anfange nur M Kilogr. gesättigter Dampf von der Temperatur t_1 ohne Wasser vorhanden ist, so folgt $m_1 = M$ und dann ist nach Gleichung (120) die in Arbeit verwandelte Wärmemenge, wenn während der Expansion der Dampf immer gesättigt bleiben, seine Temperatur auf t_2 sinken, dabei aber kein Dampf condensirt werden soll:

$$L = 1{,}2551\, M(t_1 - t_2). \tag{123}$$

Die Zunahme der inneren Wärme ist nach Gleich. (121)

$$U = -0{,}2342\, M(t_1 - t_2), \tag{124}$$

also negativ, d. h. die im Dampfe enthaltene Wärme nimmt ab.

Endlich folgt die von aussen zuzuführende Wärme nach Gleichung (122):

$$Q = 1{,}0209\, M(t_1 - t_2) \tag{125}$$

Um ein specielles Beispiel zu verfolgen, denke man sich 1 Kilogr. gesättigten Dampf von 4 Atmosphären Spannung, ohne Beimischung von Wasser; dieser Spannung entspricht nach Tabelle III, Columne 2, die Temperatur $t_1 = 144{,}00^0$. (Diese Tabelle III bedarf nach den Erörterungen, die bei Betrachtung der Tabellen I und II stattfanden, keiner weiteren Erläuterung. Ich habe diese Tabelle noch berechnet, weil sie gerade in dieser Form bei Lösung von Aufgaben aus dem praktischen Leben recht brauchbar erscheint.)

Der Dampf soll sich nun ausdehnen, so dass am Ende seine Spannung noch 1 Atmosphäre, seine Temperatur sonach $t_2 = 100^0$ beträgt; dabei soll der Dampf fortwährend gesättigt bleiben und kein Theil desselben sich während der Expansion condensiren.

Die Gleichung (123) giebt dann die in Arbeit verwandelte Wärmemenge:

$$L = 1{,}2551\,(144{,}00 - 100) = 55{,}225 \text{ Calorien.}$$

Die Arbeit der Expansion ist sonach:

$$424 \,.\, 55{,}225 = 23415 \text{ Meterkilogr.}$$

Damit aber während der Expansion die Dampfmenge constant bleibe, also keine Condensation stattfinde, muss von aussen die Wärmemenge

$$Q = 1{,}0209\,(144 - 100) = 44{,}920 \text{ Calorien}$$

zugeführt werden.

Die Differenz beider Wärmemengen endlich giebt die Wärmemenge, welche dabei der Dampf abgiebt, also

$$U = 10{,}305 \text{ Calorien.}$$

Die vorstehenden Resultate sind für die Dampfmaschinentheorie von hoher Bedeutung, denn sie zeigen, dass vom Standpunkte der mechanischen Wärmetheorie aus die bisherigen Anschauungen von der Expansionswirkung des Dampfes bei Dampfmaschinen zu verwerfen sind.

Während die Theorie uns zuerst zeigte, dass der Dampf im gesättigten Zustande nicht dem *Mariotte* und *Gay-Lussac*'schen Gesetze folgt, giebt jetzt die Lösung des vorstehenden Problems auch noch das Resultat, dass die Annahme von *Pambour*:

„der Dampf bleibe, während er sich ohne Wärmezuführung ausdehnt, gesättigt, und es schlage sich dabei kein Dampf nieder",

unzulässig ist.

Die Wärmelehre zeigt, entgegen der *Pambour*'schen Hypothese, dass man dem Dampfe von aussen Wärme zuführen müsste, und zwar, wie Gleichung (112) zeigt, auf 1 Kilogr. Dampf für jeden Grad Temperaturerniedrigung etwas mehr als eine Wärmeeinheit, wenn man verlangt, die Dampfmenge soll, während sie durch Expansion Arbeit verrichtet, constant bleiben, ohne dass eine Ueberhitzung stattfindet.

Bei den Dampfmaschinen findet aber, während sich der Dampf im Cylinder ausdehnt, eine solche Wärmezuführung durchaus nicht statt, und daher muss man schliessen, dass hier während der Expansion stets eine theilweise Condensation des Dampfes stattfindet.

Diese wichtige Entdeckung über das Verhalten des Dampfes während der Expansion, die fast gleichzeitig von *Clausius* und *Rankine* gemacht wurde,*) wird sehr bald eine vollständig neue „Theorie der Dampfmaschinen" nöthig machen, denn nach dem Vorstehenden sind eben die beiden Fundamentalsätze, auf welche alle bisherigen Arbeiten beruhen, unrichtig.

Im zweiten Probleme sollen die Grundlagen dieser Theorie gegeben werden.

Ist neben der Dampfmenge m_1 auch noch die Wassermenge $M - m_1$ vorhanden, so war die während der Expansion von aussen zuzuführende Wärmemenge gegeben durch die Gleichung (122):

$$Q = (2{,}0433\, m_1 - 1{,}0224\, M)(t_1 - t_2).$$

Diese Gleichung zeigt nun allerdings, dass unter gewissen Verhältnissen, nämlich wenn:

$$2{,}0433\, m_1 = 1{,}022\, M$$

oder

$$m_1 = 0{,}500\, M$$

ist, $Q = 0$ ausfällt; d. h. beträgt die Dampfmenge dem Gewichte nach die Hälfte der ganzen Masse, oder so viel wie die vorhandene Wassermenge, so ist eine Wärmezuführung von aussen nicht erforderlich, damit die Expansion unter constant bleibender Dampfmenge stattfinde; ja für den Fall, dass dem Gewichte nach mehr Wasser als Dampf vorhanden ist, fällt sogar Q negativ aus, d. h. man müsste der ganzen Masse während der Expansion unter der genannten Voraussetzung Wärme entziehen. Würde sonach im letzteren Falle eine solche Wärmeentziehung nicht stattfinden, so würde während der Expansion Wasser verdampfen.

---

*) Der Weg, welcher *Clausius* und *Rankine* zu ihrer schönen Entdeckung führte, ist sehr verschieden von dem, der oben eingeschlagen wurde. Das Resultat, dass bei der Expansion des gesättigten Dampfes eine theilweise Condensation stattfindet, ist übrigens schon durch die Versuche von *Hirn*, a. a. O.; S. 144, vollkommen bestätigt worden.

Auf den Einfluss des dem Dampfe beigemengten Wassers wurde bisher noch nicht hingewiesen; durch Versuche wird sich die Richtigkeit des Vorstehenden freilich schwer nachweisen lassen. Die Betrachtungen gelten nämlich nur unter der Voraussetzung, dass die Temperatur des vorhandenen Wassers in gleichem Maasse sinkt, wie die des Dampfes; je mehr also neben Dampf auch Wasser vorhanden ist, um so langsamer müsste die Ausdehnung erfolgen, weil die Wärmeabgabe des Wassers nur langsam von statten geht. Ueberdies setzen wir auch voraus, dass die Expansion in einem für Wärme undurchdringlichen Cylinder stattfinde.

Bei Dampfmaschinen tritt aber der zuletzt behandelte Fall durchaus nicht auf; hier ist die Wassermenge, die anfangs dem Dampfe mechanisch beigemischt ist, immer gering und wird in der Temperaturerniedrigung mit dem Dampfe vollständig gleichen Schritt halten. Hier wird daher auch immer eine theilweise Condensation des Dampfes während der Expansion stattfinden.

Die in diesem § entwickelten Formeln gelten auch, wenn die im Cylinder enthaltene Masse comprimirt werden soll, so dass die Temperatur von t_2 auf t_1 steigt. Soll dabei die Dampfmenge m_1 constant bleiben, so giebt Gleichung (120) die von uns aufzuwendende Arbeit (in Wärme ausgedrückt); Gleichung (121) giebt die Zunahme der inneren Wärme und Gleichung (122) die Wärmemenge, welche während der Operation der Masse entzogen werden muss, wenn der Werth von Q positiv ausfällt; hingegen abgeführt werden muss, wenn Q negativ erscheint; was der Fall ist, wenn resp. $m_1 > \frac{1}{2} M$ oder $m_1 < \frac{1}{2} M$ ist.

Ist $m_1 = \frac{1}{2} M$, also Dampf- und Wassermenge dem Gewicht nach gleich gross, so ist während der Compression ein Zu- oder Abführen auch hier nicht erforderlich, damit die Dampfmenge unverändert bleibe.

§ 35.

PROBLEM II.

„In einem Dampfcylinder befinden sich m_1 Kilogr. Dampf und $(M - m_1)$ Kilogr. Wasser, beide von der Temperatur t_1. Die Masse dehne sich aus, so dass die Temperatur von t_1 auf t_2 sinke, und zwar finde die Ausdehnung so langsam statt, dass der Dampf in jedem Augenblicke mit dem vollen, seinem augenblicklichen Volumen und der augenblicklichen Temperatur entsprechenden Drucke wirkt.

„Welche Arbeit verrichtet der Dampf und welches Verhalten zeigt die ganze Masse von Dampf und Wasser, wenn während der Expansion von aussen weder Wärme zu- noch abgeführt wird?"

Da hier der Voraussetzung gemäss der Dampf fortwährend einen äusseren Druck überwindet, der seiner augenblicklichen Spannung gleich ist, so gelten die Gleichungen (V) und (VI).

Die Aufgabe setzt voraus, dass während der Expansion Wärme weder zu- noch abgeführt werde, und daher ist in Gleichung (V): $dQ = 0$, sonach:

$$Mc\,dt + d(mr) - \frac{mr}{T}\,dt = 0.$$

Diese Gleichung schreibt sich auch, wegen $dt = dT$:

$$Mc\,dT + \frac{T\,d(mr) - (mr)\,dT}{T} = 0,$$

oder wenn man noch durch T dividirt, so folgt nach einem bekannten Satze der Differentialrechnung:

$$Mc\,\frac{dT}{T} + d\left(\frac{mr}{T}\right) = 0.$$

Für mittlere Temperaturen ist c constant und daher lässt diese Gleichung integriren; man erhält:

$$Mc\;logn.\,T + \frac{mr}{T} = \text{Const.}$$

Im Anfange war nun die Dampfmenge m_1, die Temperatur t_1, also die absolute Temperatur T_1 und die dieser Temperatur entsprechende Verdampfungswärme r_1. Am Ende der Expansion seien die nämlichen Grössen mit m_2, t_2, T_2 und r_2 bezeichnet, man erhält sonach aus der letzten Gleichung:

$$Mc\, logn.\, T_1 + \frac{m_1 r_1}{T_1} = \text{Const.}$$

und ebenso:

$$Mc\, logn.\, T_2 + \frac{m_2 r_2}{T_2} = \text{Const.}$$

und hieraus durch Subtraction:

$$\frac{m_2 r_2}{T_2} = \frac{m_1 r_1}{T_1} + Mc\, logn.\, \frac{T_1}{T_2}, \tag{126}$$

eine Gleichung, welche zuerst von *Clausius* gegeben wurde. Man erkennt aus ihr sofort, dass im Allgemeinen die Dampfmenge m_2 am Ende von der anfänglichen m_1 verschieden sein wird.

Die Lösung des Problems I hat schon gezeigt, was sich im vorliegenden Falle ergiebt; ist nämlich im Anfange die Dampfmenge m_1 grösser, als die vorhandene Wassermenge, so schlägt sich bei der Expansion Dampf nieder (es ist $m_2 < m_1$) und das ist der bei Dampfmaschinen vorkommende Fall; ist hingegen anfänglich die Dampfmenge geringer als die Wassermenge, so verdampft während der Expansion Wasser, und ist endlich im Anfange Dampf- und Wassermenge gleich gross, so bleibt dieses Verhältniss auch während der Expansion das gleiche.

Bei der Compression finden die Vorgänge umgekehrt statt, d. h. comprimirt man die Masse ohne Wärmeabführung oder Wärmezuleitung und ist weniger Wasser als Dampf vorhanden, so verdampft Wasser (ohne Anwesenheit von Wasser fände eine Ueberhitzung des Dampfes statt) und ist anfänglich mehr Wasser als Dampf vorhanden, so schlägt sich Dampf nieder.

Genau dieselben Resultate, wie sie aus Problem I folgten, giebt auch die *Clausius*'sche Formel (126); diese ist

aber besonders deswegen noch von hoher Bedeutung, weil sie das Mittel an die Hand giebt, für jeden Augenblick der Expansion aus der eben stattfindenden Temperatur die Dampfmenge zu berechnen.

Bevor wir auf speciellere Untersuchungen eingehen, mag zunächst die während der Expansion (ohne Wärmezuführung) vom Dampfe verrichtete äussere Arbeit berechnet werden.

Da die Zunahme dU der inneren Wärme zu der in äussere Arbeit verwandelten Wärme dL addirt, die von aussen zuzuführende Wärme dQ ergiebt, so ist:

$$dQ = dU + dL,$$

oder da hier $dQ = 0$ sein soll, so folgt die in äussere Arbeit verwandelte Wärme:

$$dL = -dU,$$

oder nach Gleichung (IV):

$$dL = -Mc\,dt - d(m\varrho).$$

Die Integration giebt hier, wenn t_2 die Temperatur, m_2 die Dampfmenge und ϱ_2 die innere latente Wärme am Ende der Expansion ist:

$$L = -Mct_2 - m_2\varrho_2 + \text{Const.}$$

und ebenso, wenn t_1, m_1 und ϱ_1 diese Grössen im Anfange darstellen: $0 = -Mct_1 - m_1\varrho_1 + \text{Const.}$;

sonach folgt endlich durch Subtraction der beiden letzten Gleichungen die in Arbeit verwandelte Wärme, wenn sich der Dampf ohne Zu- oder Abführung von Wärme ausdehnt:

$$L = Mc(t_1 - t_2) + (m_1\varrho_1 - m_2\varrho_2). \qquad (127)$$

Nun sind die Werthe von ϱ_1 und ϱ_2 als Functionen von t_1 und t_2 nach Gleichung (111) bekannt, ferner bestimmt sich nach Gleichung (126) die Dampfmenge m_2 am Ende der Expansion und sonach ist die Aufgabe vollständig gelöst.

Die Arbeit des Dampfes findet sich schliesslich, wenn man die durch Gleichung (127) erhaltene Wärmemenge L mit dem mechanisehen Wärmeäquivalent 424 multiplicirt.

Diese beiden Gleichungen (126) und (127) sind es, welche die Grundlage der „Theorie der Dampfmaschinen" geben könnten, denn bei diesen Maschinen findet die Expansionswirkung ganz in der Weise statt, wie es das vorliegende Problem voraussetzt.

Für diessen Zweck erscheint es jedoch zweckmässig, diese beiden Gleichungen umzuformen.

Setzt man die Dampfmenge am Ende

$$m_2 = m_1 + \mu,$$

wo der Werth μ, wenn er negativ ausfällt, die Dampfmenge bedeutet, die sich während der Expansion niederschlägt, und wenn der Werth positiv ist, die neu entstandene Dampfmenge darstellt; dann schreibt sich Gleichung (126):

$$\mu \frac{r_2}{T_2} = m_1 \left(\frac{r_1}{T_1} - \frac{r_2}{T_2}\right) + Mc\, logn. \frac{T_1}{T_2} \qquad (128)$$

und die in Arbeit verwandelte Wärme nach Gleich. (127):

$$L = Mc\,(t_1 - t_2) + m_1\,(\varrho_1 - \varrho_2) - \mu \varrho_2. \qquad (129)$$

Nun weiss man aber jetzt nach den Ergebnissen des vorigen Problems, dass die Dampfmenge constant bleibt, also $\mu = 0$ ist, sobald Dampf- und Wassermenge im Cylinder dem Gewichte nach gleich gross, d. h. wenn $M = 2m_1$ ist.

Setzen wir sonach in Gleichung (128) $M = 2m_1$, so muss $\mu = 0$ erscheinen; das giebt:

$$0 = m_1 \left(\frac{r_1}{T_1} - \frac{r_2}{T_2}\right) + 2\,m_1\, c\, logn. \frac{T_1}{T_2}$$

und daher:

$$\frac{r_1}{T_1} - \frac{r_2}{T_2} = -2\,c\, logn. \frac{T_1}{T_2}. \qquad (130)$$

Benutzt man diese Formel in Gleichung (128), so folgt schon einfacher:

$$\mu = (M - 2\,m_1)\, c\, \frac{T_2}{r_2}\, logn. \frac{T_1}{T_2},$$

oder auch:

$$\mu = \frac{(M - 2\,m_1)}{2} \frac{T_2}{r_2} \left(\frac{r_2}{T_2} - \frac{r_1}{T_1}\right). \qquad (131)$$

Die Gleichung (126), sowie auch die vorstehenden Formeln sind aber für praktische Rechnungen unbequem; und da überdies gerade der vorliegende Fall für die Theorie der Dampfmaschinen von besonderer Wichtigkeit ist, so erscheint es höchst wünschenswerth, bequemere Ausdrücke von μ, sowie zur Bestimmung der bei der Expansion in Arbeit verwandelten Wärme zu erlangen.

Auf Grund verschiedener Betrachtungen und Rechnungen, auf die ich nicht näher eingehen kann, erhielt ich die folgende Beziehung, durch deren Benutzung die vorstehenden Ausdrücke eine äusserst einfache Gestalt gewinnen; eine Beziehung, deren Richtigkeit ich zwar noch nicht theoretisch nachzuweisen vermag, die aber, wie einige leichte Nachrechnungen überzeugen können, die gleichen Resultate liefert, wie Gleichung (126).

Bezeichnet nämlich ϱ_1 und ϱ_2 die innere latente Wärme, welche den Temperaturen t_1 und t_2 entspricht, so ist die genannte Beziehung:

$$\frac{\frac{r_2}{T_2} - \frac{r_1}{T_1}}{2\frac{r_2}{T_2}} = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2}. \qquad (132)$$

Benutzt man diesen Ausdruck in Gleichung (131), so findet sich sehr einfach:

$$\mu = (M - 2\,m_1)\frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2} \qquad (133)$$

und dann durch Gleichung (129) die bei der Expansion in Arbeit verwandelte Wärme:

$$L = Mc\,(t_1 - t_2) - (M - m_1)\,(\varrho_2 - \varrho_1). \qquad (134)$$

Nun ist aber nach Gleichung (111):

$$\varrho = 575{,}03 - 0{,}7882\,t.$$

Setzen wir daher in Zukunft $\alpha = 575{,}03$ und $\beta = 0{,}7882$, so giebt Gleichung (134):

$$L = [Mc - (M - m_1\,\beta]\,(t_1 - t_2), \qquad (135)$$

worin überdies c, die specifische Wärme des Wassers, con-

stant und zwar nach Gleichung (112) $c = 1{,}0224$ gesetzt werden darf. Die Gleichungen (134) und (135) sind es nun, die meiner Ansicht nach einer neuen Dampfmaschinentheorie zu Grunde gelegt werden können. Ihre Einfachheit und bequeme Form, sowie der Umstand, dass ihre Resultate ganz befriedigend mit den Ergebnissen der Gleichungen von *Clausius* übereinstimmen (die übrigens selbst nur näherungsweise richtig sind), empfiehlt sie gewiss zu dem genannten Zwecke.

Ist im Anfange der Expansion kein Wasser, also nur gesättigter Dampf vorhanden, so ist $m_1 = M$, und sonach folgt nach Gleichung (133) die Dampfmenge, die sich während der Expansion niederschlägt:

$$\mu = -M\frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2}; \tag{136}$$

das negative Vorzeichen deutet eben die Condensation oder das Verschwinden von Dampf an.

Ist die Dampfmenge am Ende m_2, so ist nach Obigem:

$$m_2 = m_1 + \mu,$$

oder hier:

$$m_2 = M + \mu,$$

und daher mit Benutzung der Gleichung (136) die Dampfmenge am Ende der Expansion:

$$m_2 = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} M. \tag{137}$$

Die Wärmemenge, welche dabei in Arbeit verwandelt wird, ist dann nach Gleichung (135):

$$L = Mc\,(t_1 - t_2) \tag{138}$$

und sonach die Expansionsarbeit in Meterkilogr.:

$$424 \,.\, Mc\,(t_1 - t_2).$$

Unter dieser speciellen Voraussetzung ergeben sich also Gleichungen von merkwürdig einfacher Form.

Nimmt man hingegen an, es sei im Anfange so viel Wasser als Dampf vorhanden, so ist $m_1 = \frac{M}{2}$, und daher nach Gleichung (133):

$$\mu = 0,$$

d. h. die Dampfmenge bleibt constant, wie schon bekannt. Die Gleichung (135) giebt dann die in Arbeit verwandelte Wärme, wenn man dort $M = 2m_1$ setzt:

$$L = 1{,}2566\, m_1 (t_1 - t_2),$$

wie auch Gleichung (120) im Problem I ergab. (Der constante Factor ist dort zwar 1,2551 statt 1,2566 gefunden worden; diese Abweichung ist aber als ganz unbedeutend zu übersehen, besonders wenn man bedenkt, auf welch verschiedenen Wegen ich hier und dort auf den vorstehenden Ausdruck gelangt bin.)

Würde endlich anfänglich mehr Wasser als Dampf vorhanden gewesen sein, so würde Gleichung (133) den Werth μ positiv ergeben haben, d. h. dieser Werth repräsentirt dann die Wassermenge, die während der Expansion verdampft.

§ 36.

Ein specielles Beispiel soll die Bedeutung der vorstehenden Ergebnisse noch deutlicher hervorheben.

Bei einer Hochdruckdampfmaschine trete während der Verbindung des Kessels mit dem Cylinder aus dem ersteren in den letzteren die Dampfmenge m_1 und die Wassermenge $M - m_1$ ein und dann werde die Verbindung aufgehoben.

Der Raum, den diese Masse einnimmt, ist, wenn p_1 die Spannung des Dampfes und v_1 das zugehörige Volumen der Gewichtseinheit Dampf und w das des Wassers ist,

$$m_1 v_1 + M (v_1 - w_1),$$

oder:

$$m_1 u_1 + M w,$$

wenn man, wie früher, $v_1 - w = u_1$ setzt. Da während des Uebertrittes die Spannung constant bleibt, so ist die während dessen im Cylinder verrichtete Arbeit

$$p_1 (m_1 u_1 + M w)$$

und diese Arbeit in Wärme ausgedrückt, giebt:

$$A p_1 (m_1 u_1 + M w). \tag{139}$$

Die Masse soll jetzt weiter durch Expansion wirken, während Wärme von aussen weder zu- noch abgeführt wird. Sinkt dabei die Temperatur von t_1 auf t_2, so ist der zweite Theil der Dampfarbeit, die Expansionsarbeit, in Wärme ausgedrückt nach Gleichung (135):

$$[Mc-(M-m_1)\beta](t_1-t_2)$$

und daher die Wärmemenge W, die der gesammten vom Dampfe vor dem Kolben verrichteten Arbeit entspricht:

$$W=Ap_1(m_1u_1+Mw)+[Mc-(M-m_1)\beta](t_1-t_2). \quad (140)$$

Der Dampf habe nun z. B. eine Spannung von 6 Atmosphären (Locomotivmaschine) und zwar sei demselben anfänglich kein Wasser beigemengt, es sei also $m_1=M$. Die der gegebenen Spannung entsprechende Temperatur ist nach Tabelle III: $t_1=159{,}2^{\circ}$. Wird nun die Expansion so weit fortgesetzt, bis die Temperatur nur noch $111{,}7^{\circ}$, also die Spannung p_2 am Ende noch $1^1/_2$ Atmosphäre beträgt, und setzt man überdies nach Tabelle III: $u_1=0{,}3048$; $w=0{,}001$, sowie die bekannten Werthe von A, c und β ein, so folgt:

$$W=107{,}76\,M$$

Wärmeeinheiten, oder die Arbeit des Dampfes vor dem Kolben:

$$424\,.\,W=45690\,M\text{ Meterkilogr.}$$

Jedem Kilogramm Dampf (ohne Beimischung von Wasser entspricht sonach bei dieser Maschine eine Arbeit von 45690 Meterkilogr. vor dem Kolben.

Da im Anfange kein Wasser vorhanden sein sollte, so berechnet sich die Dampfmenge m_2 am Ende der Expansion nach Gleichung (137):

$$m_2=\frac{\varrho_1}{\varrho_2}M$$

und da nach Tabelle III die den Temperaturen t_1 und t_2 entsprechenden Werthe von ϱ_1 und ϱ_2 gleich 449,55 und 486,99 sind, so folgt:

$$m_2=0{,}9231\,M.$$

Es haben sich also $0{,}0769\,M$ Kilogr. oder $7{,}69\,\%$ Dampf während der Expansion niedergeschlagen; so gering diese Menge vielleicht erscheint, so ist sie doch von wesentlichen Einfluss auf die Arbeit der Expansion, denn die Wärmemenge, die im Dampfe mehr enthalten ist, als im gleichen Gewichte Wasser von gleicher Temperatur und die hier noch zur Verwendung kommt, ist beträchtlich.

Das Volumen V der Masse bei Beginn der Expansion war allgemein:

$$V_1 = m_1 u_1 + Mw.$$

Am Ende wird es hingegen sein:

$$V_2 = m_2 u_2 + Mw.$$

Nun ist für die gegebenen Temperaturen nach Tabelle III:

$$u_1 = 0{,}3048 \text{ und } u_2 = 1{,}1224$$

und daher folgt auch:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= 0{,}3048\,m_1 + 0{,}001\,M \\ V_2 &= 1{,}1224\,m_2 + 0{,}001\,M \end{aligned}\right\} \qquad (141)$$

Im vorliegenden Falle ist aber:

$$m_1 = M \text{ und } m_2 = 0{,}9231\,M$$

und sonach ergiebt sich:

$$V_1 = 0{,}3058\,M \text{ und } V_2 = 1{,}0370\,M$$

und daher das Expansionsverhältniss:

$$\frac{V_2}{V_1} = 3{,}391.$$

Nimmt man ferner für vorliegende Maschine an, dass der constante Gegendruck hinter dem Kolben $1\frac{1}{4}$ Atmosphären, sonach der Druck q pro Quadratmeter Kolbenfläche

$$q = 1\tfrac{1}{4} \,.\, 10334 = 12917 \text{ Kilogr.}$$

beträgt, so ist die Arbeit zur Ueberwindung des Gegendruckes, während der Kolben den Raum $V_2 = 1{,}0370\,M$ durchläuft:

$$V_2 q = 1{,}0370 \,.\, 12917\,M = 13395\,M \text{ Meterkilogr.}$$

Zieht man diese Arbeit von der Arbeit des Dampfes vor dem Kolben ab, so ergiebt sich als Nutzarbeit des Dampfes (natürlich abgesehen von allen weiteren Widerständen)

$$32295\ M \text{ Meterkilogr.*)}.$$

Die in M Kilogr. Dampf von 6 Atmosphären Spannung enthaltene Wärme ist nach Tabelle III

$$608{,}99\ M \text{ Calorien}$$

und da bei der Bildung sofort die Wärmemenge

$$A p_1 u_1 \,.\, M,$$

oder nach Tabelle III

$$44{,}58\ M \text{ Calorien}$$

in Arbeit verwandelt wurde, so war die erforderliche Gesammtwärme:

$$608{,}99\ M + 44{,}58\ M = 653{,}57\ M \text{ Calorien},$$

d. h. diese Wärmemenge war nöthig, um aus Wasser von 0^0, Dampf von t^0 Temperatur zu erzeugen und zwar auf dem Wege, wie es früher bei Betrachtung der *Regnault*schen Versuche angedeutet wurde, ein Weg, der genau mit dem übereinstimmt, wie wir ihn bei der Bildung des Dampfes im Dampfkessel einschlagen. (Unter der Voraussetzung, dass die Maschine im Beharrungszustande ist.)

Nehme ich nun an, das Speisewasser habe eine Temperatur von 15^0, so enthalten die M Kilogr. Wasser beim Eintritt in den Kessel schon

$$15\ M \text{ Calorien},$$

---

*) Rechnet man dasselbe Beispiel nach den bekannten Formeln von *Pambour*, so ergiebt sich bei gleicher Anfangs- und Endspannung das Expansionsverhältniss:

$$3{,}497$$

und die Nutzarbeit (ohne Rücksicht auf den schädlichen Raum)

$$30556\ M \text{ Meterkilogr.}$$

Hingegen bei gleicher Anfangsspannung und bei dem im Texte gefundenen Expansionsverhältniss bestimmt sich die Nutzarbeit nach *Pambour*:

$$30451\ M \text{ Meterkilogr.}$$

weil wir bei dieser geringen Temperatur die specifische Wärme des Wassers richtiger = 1 setzen.

Hiernach erfordert die Wassermenge M im Kessel noch die Zuführung einer Wärmemenge von

$$638{,}57\ M \text{ Calorien,}$$

welcher die Arbeit von

$$424 \,.\, 638{,}57\ M \text{ Meterkilogr.}$$

entspricht. Bei der angenommenen Maschine ergab sich aber nur eine Nutzarbeit von

$$32295\ M \text{ Meterkilogr.,}$$

das Verhältniss beider ist sonach:

$$\frac{32295}{424 \,.\, 638{,}57} = 0{,}1193.$$

Man erkennt daraus, dass sonach bei vorliegender Dampfmaschine von der ganzen in den Kessel tretenden Wärme nur 11,93 % nützlich verwendet, d. h. in mechanische Arbeit verwandelt wird.

In Wirklichkeit gestalten sich aber die Verhältnisse noch ungünstiger, da man richtiger bei der Beurtheilung der Wärmebenutzung die Wärmemenge zu Grunde legen muss, welche bei vollkommener Verbrennung dem Brennmateriale entzogen werden könnte.

Bei Dampfkesseln mit Steinkohlenfeuerung tritt im Mittel von der Wärmemenge, die bei vollkommener Verbrennung der Steinkohlen frei würde, nur 52,7 % wirklich in den Kessel, wie ich bei einer andern Gelegenheit gezeigt habe*); rechnet man im günstigsten Falle 60 % für die vorliegende Maschine, so ergiebt sich der wahre Wirkungsgrad derselben:

$$0{,}60 \,.\, 0{,}1193 = 0{,}0716.$$

Man ersieht daraus, welch' weites Feld in der Verbesserung der Dampfmaschinen noch offen steht! —

---

*) „Civilingenieur“ Bd. IV, S. 127. Ueber die Anwendung der Ventilatoren als Zugmittel bei Dampfkesselfeuerungen.

Das gleiche Beispiel soll nun auch unter der Voraussetzung gelöst werden, dass dem in den Dampfcylinder tretenden Dampf eine gewisse Quantität Wasser beigemengt ist.

Nach der *Pambour*'schen Theorie lässt sich diese Aufgabe nicht lösen, während das mit Hülfe der Grundsätze der mechanischen Wärmetheorie sehr leicht ist.

Es betrage die ganze in den Cylinder tretende Masse M und zwar betrage die Dampfmenge $m_1 = 0{,}90\,M$ und die Wassermenge $0{,}10\,M$.

Der Dampf habe wieder die Spannung von 6 Atmosphären, also die Temperatur $t_1 = 159{,}2^0$ und die Expansion werde auch hier soweit fortgesetzt, bis die Temperatur auf $t_2 = 111{,}7^0$ gesunken ist.

Dann beträgt die Wärmemenge, welche der Arbeit des Dampfes vor dem Kolben vor und während der Expansion entspricht, wenn man Gleichung (140) und die dort gemachten Angaben benutzt:

$$W = 99{,}57\,M \text{ Calorien}$$

und sonach hier die Arbeit vor dem Kolben:

$$424 \,.\, 99{,}57 = 42218 \text{ Meterkilogr.}$$

Nach Gleichung (133) findet sich dann die Dampfmenge, die während der Expansion condensirt:

$$\mu = (M - 2m_1)\frac{\varrho_2 - \varrho_1}{\varrho_2},$$

oder unter Benutzung der Werthe $m_1 = 0{,}90\,M$, $\varrho_1 = 449{,}55$ und $\varrho_2 = 486{,}99$:

$$\mu = 0{,}0615\,M,$$

also ist die Dampfmenge am Ende der Expansion nur noch:

$$m_2 = 0{,}8385\,M$$

und die Wassermenge:

$$M - m_2 = 0{,}1615\,M.$$

Es wächst also in Folge der Expansion die dem Dampfe beim Eintritte in den Cylinder beigemengte Wassermenge von 10% auf 16,1% der ganzen Masse und hieraus ist zu

schliessen, dass die aus dem Cylinder einer Expansionsdampfmaschine mit dem Dampfe austretende Wassermenge „nicht allein aus dem vom Dampfe mechanisch mit fortgerissenem Wasser besteht, sondern dass ein grosser Theil davon (in unserem Falle 37,89 %) erst in Folge der Expansion im Cylinder entstanden ist.“

Nach Gleichung (140) findet sich ferner das Volumen der Masse

bei Beginn der Expansion $V_1 = 0{,}3048\, m_1 + 0{,}001\, M = 0{,}2843\, M$

am Ende - - $V_2 = 1{,}1224\, m_2 + 0{,}001\, M = 0{,}9511\, M$

und daraus das Expansionsverhältniss

$$\frac{V_2}{V_1} = 3{,}345.$$

Soll der constante Gegendruck auch hier $1\frac{1}{4}$ Atmosphäre, also $q = 12917$ Kilogr. pr. Qudratmeter betragen, so ist die Arbeit zur Ueberwindung des Gegendruckes

$$V_2 q = 0{,}9511 \,.\, 12917 \,.\, M = 12285\, M \text{ Meterkilogr.}$$

Diese Arbeit von der Arbeit des Dampfes vor dem Kolben subtrahirt, giebt dann die Nutzarbeit

$$29933\, M \text{ Meterkilogr.}$$

Denkt man sich die Dampfmenge m_1 aus Wasser von 0° Temperatur erzeugt, so ist die nöthige Wärme nach Obigem

$$653{,}57\, m_1 = 588{,}21\, M.$$

Das beigemengte Wasser hingegen erforderte die Wärmemenge:

$$(M - m_1)\, c t_1 = 0{,}10 \,.\, 1{,}0224 \,.\, 159{,}2\, M = 16{,}27\, M,$$

sonach ist die für die ganze Masse erforderliche Wärme:

$$588{,}21\, M + 16{,}27\, M = 604{,}48\, M.$$

Hatte das Speisewasser schon die Temperatur von 15°, wie auch oben vorausgesetzt wurde, so war im Kessel für die im Cylinder verbrauchte Dampf- und Wassermenge die Wärmemenge:

$$589{,}48\, M$$

erforderlich und dieser entspricht die Arbeit

$$424 \,.\, 589{,}48\, M \text{ Meterkilogr.}$$

Sonach ist endlich hier das Verhältniss der Nutzarbeit zu der dem Kessel als Wärme zugeführten Arbeit:

$$\frac{29933}{424 \,.\, 589{,}48} = 0{,}1197.$$

Dieser Werth ist fast der gleiche, wie der, welcher sich unter der Voraussetzung ergab, dass dem Dampfe im Anfang der Expansion kein Wasser beigemischt sei, obgleich dort die Expansion etwas weiter getrieben werden musste. Ich bin geneigt, daraus zu schliessen, dass eine Beimischung von Wasser die Wirkung des Dampfes bei Dampfmaschinen mit Expansion nicht beeinträchtigt, so lange man annehmen kann, dass das Wasser während der Expansion mit dem Dampfe die gleiche Temperaturerniedrigung erleidet.

Die vorstehenden Betrachtungen werden genugsam den Weg angedeutet haben, wie man mit Hülfe der jetzt vorhandenen experimentellen Grundlagen zu einer neuen Theorie der Dampfmaschine, die sich auf die Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie stützt, gelangen wird. Der erste Schritt dazu ist auch darin von *Clausius* in seiner vortrefflichen Abhandlung*): „Ueber die Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf die Dampfmaschine“ gethan worden. Die Durchführung der Rechnung ist dort jedoch in ganz anderer Weise geschehen, als dies im Vorstehenden angedeutet wurde**).

---

*) *Poggendorff*'s Annalen Bd. 97, S. 441.

**) Es existirt überdies eine andere Arbeit „Theorie der Dampfmaschinen“ von *Zernikow*. Braunschweig 1857, die sich dem Titel und dem Vorworte nach zu urtheilen, ebenfalls auf die Grundsätze der mechanischen Wärmetheorie stützt. Genaues Eingehen in die Schrift zeigt aber bald, dass der Verfasser die vorher erschienenen Schriften über die mechanische Wärmetheorie gar nicht kennt, denn er geht bei seinen Rechnungen von Annahmen aus, die schon die Arbeiten von *Clausius* und *Rankine* als unhaltbar nachgewiesen hatten; nicht nur legt er die Annahme zu Grunde, der Dampf befolge im gesättigten Zustande das *Mariotte*- und *Gay-Lussac*'sche Gesetz, sondern er nimmt auch noch die Richtigkeit des *Pambour*'schen Satzes an. Ich würde die Schrift hier nicht erwähnt haben, wenn nicht auf dem

§ 37.

Problem III.

„In einem Dampfcylinder befinden sich m_1 Kilogr. Dampf von der Temperatur t_1, sowie $(M - m_1)$ Kilogr. Wasser von gleicher Temperatur. Der Druck p_1 von aussen gegen den Kolben der dem der Temperatur t_1 entsprechenden Drucke des Dampfes gleich ist, wird plötzlich auf den Druck p_2 gebracht und so constant erhalten.

In Folge dessen wird sich die Masse ausdehnen, wenn $p_2 < p_1$ ist, und zwar soweit, bis der Dampfdruck ebenfalls auf p_2 gesunken ist, oder die Masse wird, wenn $p_2 > p_1$ ist, comprimirt bis der Dampf die Spannung p_2 erreicht hat und dem äusseren Drucke das Gleichgewicht hält. Der am Ende vorhandene Dampf hat dann, vorausgesetzt, er ist gesättigt, es sei also noch Wasser vorhanden, die der Spannung p_2 entsprechende Temperatur t_2.

Welche Wärmemenge Q muss nun der ganzen Masse von aussen zugeführt werden, damit am Ende des Vorganges die Dampfmenge m_1 wieder die anfängliche ist, im Ganzen also weder Wasser verdampft ist, noch sich Dampf niedergeschlagen hat, und wenn dabei der Kolben als gewichtslos vorausgesetzt wird*)?

Titel ausdrücklich hervorgehoben wäre, in dieser neuen Theorie seien „die physikalischen Eigenschaften und die mechanischen Wirkungen des Dampfes von den ersten Ursachen der Dampfbildung, von der Wärme, abhängig gemacht worden.“ Zwischen diesem Buche und Allem, was bisher über die mechanische Wärmetheorie geschrieben wurde, besteht durchaus kein Zusammenhang.

*) In Betreff der Annahme, der Kolben sei „gewichtslos“, gilt auch hier und in der Folge die Bemerkung in Capitel II, § 19 (am Schlusse).

Die vorstehende Aufgabe macht die Voraussetzung, dass der äussere Druck verschieden sei vom inneren Drucke des Dampfes und dass erst am Schlusse des Vorganges die Gleichheit eintrete. Zur Lösung dieses Problems können daher die Hauptgleichungen (V) und (VI) keine Anwendung finden, und es ist uns sonach nur die Anwendung der Gleichung IV, welche die Zunahme der inneren Wärme giebt, gestattet, denn die Veränderung der inneren Wärme allein ist unabhängig von der Art und Weise, wie die die Masse aus einem Zustande in den andern übergegangen ist. Da die Temperatur im Anfange t_1 und am Ende t_2 und überdies die Dampfmenge m_1 constant sein soll, so giebt hier sofort die Integration der Gleichung (IV) die Zunahme der inneren Wärme:

$$U = Mc\,(t_2 - t_1) + m_1\;(\varrho_2 - \varrho_1). \tag{141}$$

Die in äussere Arbeit verwandelte Wärme findet sich hingegen für vorliegenden Fall auf folgende Weise.

Im Anfange war das Volumen der ganzen Masse unter der nun mehrfach angewandten Bezeichnung:

$$m_1 u_1 + Mw.$$

Am Ende hingegen ist dasselbe

$$m_1 u_2 + Mu$$

und sonach die Zunahme des Volumens:

$$m_1\,(u_2 - u_1).$$

Weil nun während dessen der constante äussere Druck p_2 überwunden wurde, so ist die vom Dampfe verrichtete äussere Arbeit

$$m_1 p_2\,(u_2 - u_1)$$

und die dieser Arbeit entsprechende Wärmemenge:

$$L = A m_1 p_2\,(u_2 - u_1). \tag{142}$$

Die von aussen zuzuführende Wärme Q ist aber gleich der Zunahme der inneren Wärme vermehrt um die in Arbeit verwandelte Wärme und sonach folgt

$$Q = U + L,$$

oder unter Benutzung der Gleichung (141) und (142) nach geringer Umformung:

$$Q = Mc(t_2 - t_1) + m_1 \left[(\varrho_2 - \varrho_1) + Ap_2 u_2 - \frac{p_2}{p_1} Ap_1 u_1 \right]. \quad (143)$$

Diese Gleichung löst die gestellte Frage vollständig, sie soll jedoch im Folgenden in etwas anderer Form benutzt werden. Addirt und subtrahirt man auf der rechten Seite den Werth $m_1 c (t_2 - t_1)$ und berücksichtigt, dass nach Früherem $\varrho + ct$ nichts Anderes, als die im Dampfe enthaltene Wärme darstellt, die dort stets mit J bezeichnet wurde, so findet sich auch:

$$Q = m_1 \left\{ Ap_2 u_2 - \frac{p_2}{p_1} Ap_1 u_1 - (J_1 - J_2) \right\} - (M - m_1) c (t_1 - t_2). \quad (144)$$

Aus der Form dieser Gleichung erkennt man sofort, dass Q positiv, negativ oder Null ausfallen kann, d. h. dass man zu dem genannten Zwecke unter Umständen Wärme zuführen oder abführen muss, oder das keines von beiden erforderlich ist, damit Dampf- und Wassermenge am Schlusse wieder die anfängliche sei. Der letzte Fall, nämlich $Q = 0$ tritt ein, wenn nach Gleichung (144) Wasser- und Dampfmenge im Anfange im folgenden Verhältniss steht:

$$\frac{M - m_1}{m_1} = \frac{Ap_2 u_2 - \frac{p_2}{p_1} Ap_1 u_1 - (J_1 - J_2)}{c(t_1 - t_2)}. \quad (145)$$

Das vorliegende Problem ist deshalb von besonderer Wichtigkeit, weil sich die erhaltenen Resultate wenigstens annähernd prüfen lassen oder richtiger gesagt, dieselben durch die Erfahrung schon bestätigt sind, wie das Folgende näher zeigen wird.

Lässt man aus einem Gefässe, das Dampf und Wasser enthält, den Dampf in die freie Luft ausströmen, so überwindet derselbe während des Ausflusses den constanten Gegendruck der äusseren Atmosphäre, und seine Spannung wird in einer gewissen Entfernung vor der Mündung in

den äusseren Druck übergegangen sein. Die Gleichung (144) setzt uns nun sogleich in den Stand, zu bestimmen, welche Wärmemenge der ganzen Masse während des Ausströmens zu- oder abgeführt werden müsste, damit der Dampf gesättigt und die Dampfmenge ungeändert bleibe.

Ein specielles Beispiel wird zur näheren Erläuterung dienen.

Es habe der Dampf im Cylinder anfänglich die Spannung von 5 Atmosphären, also die Temperatur $t_1 = 152{,}22^0$; derselbe werde plötzlich nur einem Drucke von 1 Atmosphäre ausgesetzt, d. h. die Masse dehne sich aus, bis ihre Temperatur nur noch $t_2 = 100^0$ betrage, und überwinde dabei den constanten Gegendruck von 1 Atmosphäre. Ist m_1 die Dampfmenge und $(M - m_1)$ die Wassermenge, und sollen beide während des Vorganges unverändert bleiben, so ist eine Wärmemenge Q zuzuführen, die durch Gleichung (144) sich bestimmt.

Es ist nun nach Tabelle III

für $t_1 = 152{,}22^0$; $J_1 = 608{,}99$; $Ap_1 u_1 = 44{,}082$;
$t_2 = 100^0$; $J_2 = 596{,}76$; $Ap_2 u_2 = 40{,}092$,

und da überdies $\frac{p_2}{p_1} = {}^1/_5$ und $c = 1{,}0224$ ist, so folgt:

$$Q = 19{,}04\, m_1 - 53{,}39\,(M - m_1). \qquad (146)$$

Nehme ich an, im Cylinder sei anfänglich nur Dampf vorhanden, so ist $m_1 = M$, und daher folgt:

$$Q = 19{,}04 \,.\, m_1,$$

also ist Q positiv, d. h. es ist nothwendig, Wärme von aussen zuzuführen, damit die Dampfmenge gesättigt und unverändert bleibe; würde eine solche Zuführung nicht stattfinden, so würde sich während des Vorganges Dampf niederschlagen. Dasselbe tritt ein, wenn dieser Dampf aus dem Cylinder in die freie Luft ausströmt; vor der Mündung sowohl, als im Cylinder findet dann eine theilweise Condensation statt und die Temperatur vor der Mündung beträgt 100^0. Da dieser Dampf das Condensationswasser mit sich führt, so ist er feucht, und die Hand in den Dampfstrahl gebracht, würde ein Verbrennen

derselben zur Folge haben, ähnlich als hätte man die Hand in siedendes Wasser gebracht.

Aus Gleichung (146) folgt $Q = 0$, wenn

$$\frac{M - m_1}{m_1} = 0{,}3566$$

ist. Sobald also bei den angenommenen Verhältnissen die anfängliche Wassermenge zur Dampfmenge (dem Gewichte nach) in dem gefundenen Verhältnisse steht, so bleibt die Dampfmenge während des angenommenen Processes constant, ohne dass von aussen ein Zu- oder Abführen von Wärme erforderlich wäre.

Ist endlich im vorliegenden Beispiele die Wassermenge im Anfange grösser als $0{,}3566\, m_1$, dann fällt Q negativ aus, d. h. man müsste der Masse während der Ausdehnung Wärme entziehen, damit Dampf- und Wassermenge ungeändert bleibe.

Findet sonach hier eine solche Wärmeentziehung nicht statt, während der Dampf im Cylinder den Kolben fortschiebt, also den constanten Gegendruck von 1 Atmosphäre überwindet, so wird während des Vorganges Wasser verdampfen.

Dieses Verdampfen ist nichts Anderes, als die sogenannte spontane Dampfbildung.

Diese spontane Dampfbildung findet aber nicht plötzlich, sondern nach und nach statt, und wenn die Ausdehnung der Masse schnell erfolgt, so wird sich der Dampf während des Vorganges trotz der Anwesenheit von Wasser im überhitzten Zustand befinden.

Dieser Fall tritt ein, wenn man das Ventil eines Dampfkessels öffnet und den Dampf ausströmen lässt; die Wassermenge in einem Dampfkessel ist stets viel grösser, als die anfänglich vorhandene Dampfmenge, und daher wird der Dampf durch das Ventil im überhitzten Zustande entweichen; der Dampf ist vollständig trocken und man kann die Hand unbedenklich in den Dampfstrahl bringen, ohne ein Verbrennen befürchten zu müssen; eine Behauptung, welche die Erfahrung längst bestätigt hat.

Clausius *) berechnet auf Veranlassung einer Bemerkung von *Joule* ein ähnliches Beispiel, ohne aber darauf hinzuweisen, dass es neben der Anfangs- und Endtemperatur vorzüglich das Verhältniss zwischen Wasser- und Dampfmenge im Gefässe ist, welches die eine oder die andere der eben beschriebenen Erscheinungen bedingt.

In folgender kleinen Tabelle habe ich für verschiedene Anfangsspannungen p_1 das Verhältniss der Wassermenge $M-m_1$ zur Dampfmenge m_1 nach Gleichung (145) unter der Voraussetzung berechnet, dass in allen Fällen die Endspannung p_2 eine Atmosphäre betrage. Findet sonach das daselbst angegebene Verhältniss statt, so ist weder ein Zu- noch Abführen von Wärme erforderlich, um die Dampfmenge während des angenommenen Vorganges constant zu erhalten.

p_1 = 2	3	4	5	6 Atmosphär.
$\frac{M-m_1}{m_1}$ = 0,674	0,516	0,420	0,357	0,310

Man bemerkt daraus, dass das Verhältniss zwischen Wasser- und Dampfmenge immer geringer sein kann, je höher die anfängliche Dampfspannung ist.

Nehme ich an, dass in jedem einzelnen Falle Dampf- und Wassermenge gleich gross, also $M-m_1=m_1$ sei, so finden sich nach Gleichung (144) für Q Werthe, wie sie folgende Zusammenstellung giebt:

p_1 = 2	3	4	5	6 Atmosphär
$Q = -6{,}86\,m_1$	$-16{,}77\,m_1$	$-26{,}07\,m_1$	$-34{,}35\,m_1$	$-41{,}74\,m_1$ Calorien.

Ist sonach in jedem einzelnen Falle Wasser- und Dampfmenge im Gefässe gleich gross, so muss während der Aus-

*) „*Poggendorff*'s Annalen.“ Bd. 82, S. 263.

dehnung unter den angenommenen Verhältnissen in allen Fällen der Masse Wärme entzogen werden, damit die Dampfmenge constant bleibe. Die zu entziehende Wärme muss aber nach der letzten Zusammenstellung um so grösser sein, je grösser die anfängliche Spannung ist.

Man muss daraus schliessen, dass um so mehr bei gewöhnlichen Dampfkesseln, bei denen die Wassermenge immer viel beträchtlicher, als die Dampfmenge ist, der aus dem Ventile strömende Dampf stets überhitzt ist, und dass derselbe um so trockener, um so mehr überhitzt ist, je höhere Spannung der Dampf im Kessel hat. Man kann daher die Hand um so unbedenklicher in den Dampfstrahl am Ventile bringen, je grösser die Dampfspannung im Kessel ist, und das wird ebenfalls durch die Erfahrung vollkommen bestätigt.

Es liegt der Gedanke sehr nahe, dass die elektrischen Erscheinungen, die man beim Ausströmen des Dampfes aus einem Dampfkessel beobachtet, und die, wie *Armstrong* fand, ebenfalls um so entschiedener auftreten, je höher die Dampfspannung im Kessel ist, mit den im Vorstehenden erhaltenen Resultaten in einem innigen Zusammenhange stehen.

Der aus einem Hochdruckkessel strömende Dampf ist in einem abnormen Zustande, der den in der Nähe befindlichen Körpern Feuchtigkeit zu entziehen sucht, um sich zu sättigen, und zwar mit um so grösserer Energie, je grösser seine anfängliche Spannung im Kessel war. Es ist denkbar, dass dadurch auch gewisse in der Umgebung befindliche Körper in einen eigenthümlichen Spannungszustand versetzt und so die elektrischen Erscheinungen bedingt werden.

Ueberhitzung des ausströmenden Dampfes und die Elektricitätsentwickelung treten also beide um so entschiedener auf, je höher die Spannung im Kessel ist. Obige Betrachtungen zeigten aber, dass die Ueberhitzung des ausströmenden Dampfes nicht allein von seiner anfänglichen Spannung, sondern auch, und das vorzüglich, von dem Verhältniss der im Kessel befindlichen Dampf- und Wassermenge abhängig ist, je kleiner unter sonst gleichen Ver-

hältnissen (gleicher Spannung) die Wassermenge im Verhältniss zur Dampfmenge ist, um so mehr nähert sich der ausströmende Dampf dem gesättigten Zustande, und wenn das Verhältniss gleich dem durch Gleichung (145) bestimmten, oder noch kleiner wird, ist der ausströmende Dampf gesättigt und mit Condensationswasser gemischt.

Es wäre interessant und durch Versuche leicht nachzuweisen, ob das Verhältniss der im Kessel befindlichen Dampf- und Wassermenge in gleicher Weise auf die Elektricitätserscheinungen von Einfluss ist, und ob dieselben ebenfalls um so weniger entschieden auftreten und endlich ganz verschwinden, je geringer bei gleicher Spannung die im Kessel befindliche Wassermenge gegen die Dampfmenge ist. Bestätigt sich das Letztere nicht, so wäre das nur ein neuer Beweis, dass die Elektricitätserscheinungen von der Stärke der Ueberhitzung des Dampfes unabhängig sind, und wie die Versuche von *Faraday*, *Reich* u. A. zeigen, nur der Reibung des Dampfes an der Mündung zuzuschreiben sind.

Bisher nahmen wir an, der Dampf werde plötzlich einem constanten Drucke p_2 ausgesetzt, der geringer als die anfängliche Spannung des Dampfes war.

Ist hingegen der äussere Druck p_2 grösser, so findet Compression der Masse statt, und zwar so weit, bis der Dampf im Cylinder ebenfalls die Spannung p_2 erreicht hat.

Die Gleichungen (144) und (145) gelten auch hier für diesen Fall und zeigen in gleicher Weise, dass je nach der Anfangs- und Endtemperatur und der vorhandenen Dampf- und Wassermenge Wärme zu- oder abgeführt werden muss, oder dass keines von Beiden erforderlich ist, damit die Dampfmenge während der Compression constant bleibe.

Im vorliegenden Falle ist die Endtemperatur t_2 grösser, als die Anfangstemperatur t_1, der Werth von Q nach Gleichung (144) ändert daher einfach das Vorzeichen; d. h. die Erscheinungen sind bei gleichem Verhältniss zwischen Dampf- und Wassermenge im Cylinder bei der Compression die entgegengesetzten von denen bei der Ausdehnung.

§ 38.

Problem IV.

„In einem Cylinder befinden sich m_1 Kilogr. Dampf von der Temperatur t_1 und der Spannung p_1, sowie $M - m_1$ Kilogr. Wasser von gleicher Temperatur. Der Druck p_1 von aussen gegen den Kolben wird plötzlich auf den Druck p_2 gebracht und so constant erhalten, so dass, wenn $p_2 < p_1$ ist, die Masse sich ausdehnt, und wenn $p_2 > p_1$ ist, das Ganze comprimirt wird.

„Die Ausdehnung oder Compression soll so weit gehen, bis auch der im Cylinder enthaltene Dampf die Spannung p_2, also die Masse die dieser Spannung entsprechende Temperatur t_2 erlangt hat.

„Welches ist nun der Zustand der Masse am Ende der Operation, wenn während derselben von aussen weder Wärme zu- noch abgeführt wird?"

Es sei die Dampfmenge am Ende der Operation m_2 und die der Temperatur t_2 entsprechende innere latente Wärme ϱ_2.

Nehmen wir ferner an, um den Gang der Betrachtungen übersichtlicher zu machen, es sei $p_2 < p_1$, es finde also eine Ausdehnung statt, dann ist, wie die Integration der Gleichung (IV) ergiebt, die Abnahme der inneren Wärme
$$U = Mc(t_1 - t_2) + m_1 \varrho_1 - m_2 \varrho_2. \qquad (147)$$

Da während des Vorganges von aussen weder Wärme zu- noch abgeführt wird, so wird die verschwundene innere Wärme ganz zu äusserer Arbeit gebraucht.

Diese Letztere ist aber hier, wie schon im letzten Probleme, nicht nach der Gleichung (VI) zu beurtheilen, da auch hier nicht die Bedingungen erfüllt werden, unter denen diese Gleichung entwickelt wurde.

Diese äussere Arbeit ist vielmehr in folgender Art zu bestimmen.

Das Volumen V_1 der ganzen Masse ist nach der bekannten Bezeichnung im Anfange:

$$V_1 = m_1 u_1 + Mw;$$

hingegen am Ende:

$$V_2 = m_2 u_2 + Mw.$$

Während die Masse aus dem Volumen V_1 in das Volumen V_2 übergeht, wird der constante Gegendruck p_2 überwunden, und sonach ist die der äusseren Arbeit entsprechende Wärmemenge:

$$L = Ap_2(V_2 - V_1) = Ap_2(m_2 u_2 - m_1 u_1). \tag{148}$$

Da nun hier allein die verschwundene innere Wärme zu äusserer Arbeit verbraucht wurde, so folgt die Gleichung:

$$Mc(t_1 - t_2) + m_1 \varrho_1 - m_2 \varrho_2 = Ap_2(m_2 u_2 - m_1 u_1),$$

woraus sich sofort die am Ende des Vorganges noch vorhandene Dampfmenge m_2 berechnet, wie folgt:

$$m_2 = \frac{Mc(t_1 - t_2) + m_1\left(\varrho_1 + \frac{p_2}{p_1} Ap_1 u_1\right)}{\varrho_2 + Ap_2 u_2}. \tag{149}$$

Hat man hieraus den Werth m_2 bestimmt, so erhält man dann nach Gleichung (148) die zu äusserer Arbeit verbrauchte innere Wärme, sowie die Arbeit selbst; für das Endvolumen der Masse folgt:

$$m_2 u_2 + Mw,$$

und endlich ergiebt die Vergleichung des Werthes von m_2 mit dem Anfangswerthe m_1 der Dampfmenge, ob und wie viel sich Dampf condensirt oder neu gebildet hat.

Die Gleichung (149) lässt sich übrigens noch umformen. Da nämlich die Verdampfungswärme r nach früheren Angaben sich durch die Gleichung

$$r = \varrho + Apu$$

bestimmt, so giebt die Gleichung (149) nach einfacher Reduction auch:

$$m_2 = \frac{Mc(t_1 - t_2) + m_1\left(r_1 - \frac{p_1 - p_2}{p_1} Ap_1 u_1\right)}{r_2}. \tag{150}$$

Für unsere Betrachtungen ist jedoch die folgende Umformung wichtiger. Man setze:

$$m_2 = m_1 + \mu,$$

wobei μ, wenn es positiv ist, die neu entstandene Dampfmenge, oder die in Dampf verwandelte Wassermenge darstellt, hingegen im Falle es negativ ausfällt, die Dampfmenge repräsentirt, die sich während der Operation niedergeschlagen hat.

Benutzt man sonach obige Bezeichnung von m_2 und berücksichtigt man, dass die im Dampfe enthaltene Wärme J durch die Gleichung:

$$J = \varrho + ct$$

gegeben ist, so folgt aus Gleichung (149) auch:

$$\mu = \frac{(M - m_1)c(t_1 - t_2) - m_1\left[Ap_2u_2 - \frac{p_2}{p_1}Ap_1u_1 - (J_1 - J_2)\right]}{\varrho_2 + Ap_2u_2} \quad (151)$$

Aus dieser Formel lassen sich wieder alle die Erscheinungen ableiten, die schon im vorigen Probleme behandelt wurden; sie gilt zugleich für Compression, d. h. wenn $p_2 > p_1$ ist.

Soll z. B. während des Vorganges wieder weder ein Niederschlagen noch eine Neubildung von Dampf stattfinden, so muss $\mu = 0$ sein, und daher erhält man, wenn der Zähler des Bruches auf der rechten Seite der Gleichung (151) Null gesetzt wird, genau die Gleichung (145) des vorigen Problemes, und alle dort gemachten Bemerkungen gelten auch hier. Gleichung (151) setzt uns nun aber in den Stand, die Dampfmenge wirklich zu bestimmen, die sich entweder niederschlägt, oder neu bildet, wenn während des Vorganges Wärme weder zu- noch abgeführt wird.

Vergleicht man übrigens die rechte Seite der Gleichung (151) mit Gleichung (144) des vorigen Problemes, so ergiebt sich einfach:

$$\mu = -\frac{Q}{\varrho_2 + Ap_2u_2},$$

oder

$$\mu = -\frac{Q}{r_2} \tag{152}$$

wobei Q nach dem dort Angegebenen die Wärmemenge ist, welche man der Masse während der Ausdehnung oder Compression zuführen müsste, wenn die Dampfmenge unverändert bleiben sollte. Man hat also einfach diese Wärmemenge durch die der Endtemperatur t_2 entsprechende Verdampfungswärme r_2 zu dividiren, um die Dampfmenge zu bestimmen, welche sich niederschlägt oder neu bildet, wenn eine solche Wärmezuführung oder Wärmeabführung nicht stattfindet.

So wurde im Beispiele des vorigen Problemes die Anfangsspannung zu 5 Atmosphären, also die Temperatur zu $152{,}22^0$ angenommen, und vorausgesetzt, dass die Masse M, von welcher m_1 Kilogr. dampfförmig war, sich ausdehne und dabei den constanten Druck von 1 Atmosphäre überwinde.

Damit dabei die Dampfmenge constant bleibe, sollte nach Gleichung (146) die Wärmemenge

$$Q = 19{,}04\, m_1 - 53{,}39\,(M - m_1)$$

zugeführt werden.

Findet sonach eine solche Zuführung nicht statt, so ist nach Gleichung (152), weil $t_2 = 100$, und sonach

$$r_2 = \varrho_2 + Ap_2u_2 = 496{,}21 + 40{,}09 = 536{,}30, \quad \text{ist:}$$

$$\mu = \frac{53{,}39\,(M - m_1) - 19{,}04\,m_1}{536{,}30}. \tag{153}$$

Ist z. B. im Anfange kein Wasser vorhanden, d. h. $m_1 = M$, so folgt: $\mu = -0{,}0355\, M.$

Das negative Vorzeichen deutet an, dass sich die durch diese Gleichung gegebene Dampfmenge während der Ausdehnung niederschlägt.

Ist hingegen im Anfange Wasser- und Dampfmenge gleich gross, also $M - m_1 = m_1$, so folgt:

$$\mu = +\,0{,}0640\,(M - m_1).$$

Das positive Zeichen giebt an, dass diese Dampfmenge sich während der Ausdehnung neu gebildet hat.

Im Uebrigen ist auf die Behandlung des vorigen Problems zu verweisen.

Die Lösung des vorstehenden Problems enthält übrigens die vollständige Theorie der sogenannten spontanen Verdampfung, eines Vorganges, über welchen bis jetzt noch keine genügende Aufklärung gegeben wurde. Bei gewöhnlichen Dampfkesseln tritt dieser Vorgang ein, wenn man das Feuer auf dem Rost entfernt und den Dampf durch das Ventil ausströmen lässt. Beim Ausströmen überwindet der Dampf den constanten äusseren atmosphärischen Druck und lässt man das Ausströmen so lange stattfinden, bis im Kessel die atmosphärische Spannung eingetreten ist, so gilt zur Beurtheilung des Vorganges hierbei die Gleichung (151) vollständig. Da die Wassermenge in einem Dampfkessel dem Gewichte nach die Dampfmenge stets bedeutend überwiegt, so fällt hier immer der Werth von μ positiv aus und giebt sonach sofort die Wassermenge, die während der Eröffnung in Folge der Druckverminderung in Dampf übergeht. Die zurückbleibende Wassermenge ist dann genau bekannt, ebenso die im Kessel noch enthaltene Dampfmenge von atmosphärischer Spannung. Hiernach bestimmt sich dann der Verlust an Wärme, der aus diesem Entweichen von Dampf hervorgeht. Bekanntlich lässt man in Folge dieses Verlustes das spontane Sieden bei Dampfkesseln nur ausnahmsweise zu.

§ 39.

Problem V.

„Der Inhalt eines Dampfcylinders wird durch den Kolben K in zwei Theile getheilt (Figur 7). Auf der einen

Figur 7.



(linken) Seite befinden sich m Kilogr. Dampf und $M-m$ Kilogr. Wasser von der Temperatur t unter der zugehörigen Spannung p.

„Auf der andern (rechten) Seite des Kolbens, den wir uns zunächst festgehalten und überdies „gewichtslos“ denken, befinden sich m_1 Kilogr. Dampf und $M_1 - m_1$ Kilogr. Wasser, beide von der Temperatur t_1 und unter der zugehörigen Spannung p_1.

„Man lasse nun plötzlich den Kolben frei; in Folge dessen wird, wenn, wie vorausgesetzt werden mag, $p > p_1$ ist, der Kolben von links nach rechts gehen und zwar so weit, bis der Dampf auf beiden Seiten die gleiche Spannung p_0 und die dieser entsprechende Temperatur t_0 hat.

„Wenn nun während dieses Vorganges von aussen weder Wärme zu- noch abgeführt wird, welches ist die Spannung p_0 am Ende und welche Dampf- und Wassermenge ist schliesslich im ganzen Cylinder enthalten, vorausgesetzt der Dampf sei noch gesättigt?“

Die Temperatur der Masse auf der linken Seite des Kolbens sinkt während dieses Vorganges von t auf t_0 und wenn dabei die Dampfmenge von m sich in m' umwandelt, so ist hier die Abnahme der inneren Wärme, wie die Integration der Gleichung IV ergiebt:

$$U = Mc\,(t - t_0) + m\varrho - m'\varrho_0.$$

Diese Wärmemenge wird zu Arbeit verbraucht und zwar besteht diese Arbeit in der Compression der Masse auf der rechten Seite des Kolbens; die innere Wärme dieser Masse nimmt zu und zwar ist diese Zunahme, wenn

man die Dampfmenge am Ende auf dieser Seite mit m_1' bezeichnet, nach derselben Gleichung:

$$U = M_1 c (t_0 - t_1) + m_1' \varrho_0 - m_1 \varrho_1.$$

Da nun während dieses Vorganges von aussen keine Wärme zugeführt wird, so muss der Verlust an innerer Wärme der Masse links gleich dem Gewinn an innerer Wärme der Masse rechts sein. Durch Gleichsetzen der beiden vorstehenden Ausdrücke erhält man daher nach einer einfachen Reduction:

$$Mct + M_1 c t_1 + m\varrho + m_1 \varrho_1 = (M + M_1)\, c t_0 + (m' + m_1')\varrho_0. \tag{154}$$

Ausser dieser Gleichung lässt sich nun noch eine andere aufstellen.

Nach der oft angegebenen Bezeichnung ist das gesammte Volumen der Masse rechts und links vom Kolben,

im Anfange: $(mu + Mw) + (m_1 u_1 + M_1 w)$,

hingegen am Ende: $(m' u_0 + Mw) + (m_1' u_0 + M_1 w)$.

Das Gesammtvolumen wird aber dadurch, dass der Kolben im Cylinder sich hinbewegt, nicht geändert; die beiden zuletzt gegebenen Ausdrücke sind daher gleich und man erhält sonach durch Gleichsetzen nach einfacher Reduction:

$$(m' + m_1')\, u_0 = mu + m_1 u_1. \tag{155}$$

Aus dieser Gleichung bestimmt sich nun der Werth von $m' + m_1'$ und diesen in Gleichung (154) gesetzt, giebt:

$$(M + M_1)\, c t_0 + (mu + m_1 u_1)\frac{\varrho_0}{u_0} = Mct + M_1 c t_1 + m\varrho + m_1 \varrho_1 \tag{156}$$

und diese Gleichung setzt uns in den Stand, die Temperatur t_0 am Ende zu berechnen, denn ϱ_0 und u_0 sind Functionen von t_0 und die übrigen Grössen sind durch den Anfangszustand vollkommen bekannt.

Ist dann hiernach t_0 bekannt, dann folgt u_0 und p_0, ferner nach Gleichung (155) $(m' + m_1')$ d. h. die Dampfmenge auf beiden Seiten des Kolbens am Ende des Ver-

suches; die noch vorhandene Wassermenge ist dann natürlich:

$$M + M_1 - (m' + m_1') \tag{157}$$

und hiermit ist die Aufgabe vollständig gelöst.

Um den Gang der Rechnung noch näher darzulegen, soll ein specielles Beispiel behandelt werden.

Auf der linken Seite des Kolbens (Figur 7) befinden sich M Kilogr. Dampf von 5 Atmosphären Spannung im gesättigten Zustande, also von der Temperatur $t = 152{,}22^0$ ohne Beimischung von Wasser, also ist $m = M$.

Rechts vom Kolben hingegen befindet sich Dampf und Wasser von der Temperatur $t_1 = 100^0$, also hat der Dampf die Spannung von einer Atmosphäre.

Das Gewicht der ganzen Masse betrage ebenfalls M, also sei $M_1 = M$, davon sei aber $m_1 = 0{,}75\, M$ dampfförmig und $0{,}25\, M$ als Wasser vorhanden.

Der Tabelle III gemäss ist nun:

für $t = 152^0{,}22 \qquad u = 0{,}3617 \qquad \varrho = 455{,}05$

$t_1 = 100^0{,}00 \qquad u_1 = 1{,}6449 \qquad \varrho_1 = 496{,}21$

und wenn man diese und die gegebenen Werthe in Gleichung (156) setzt, so erhält man für vorliegenden Fall nach einigen Reductionen:

$$\frac{\varrho_0}{u_0} + 1{,}2817\, t_0 = 680{,}2\,.$$

Diese Gleichung lässt sich nur näherungsweise lösen; um solche Rechnungen zu erleichtern, habe ich auf Tabelle III in der letzten Columne noch die Werthe von $\frac{\varrho}{u}$ berechnet.

Nach einigen Versuchen ergab sich als Werth der Temperatur t_0, der vorstehender Gleichung Genüge leistet:

$$t_0 = 118^0{,}6\,.$$

Dieser Temperatur entspricht die Spannung von

$$p_0 = 1426{,}44 \text{ Millim. oder } 1{,}877 \text{ Atmosphären.}$$

Am Ende des Versuches findet also auf beiden Seiten des Kolbens dieser Druck statt.

Der Werth von u_0 berechnet sich dann nach Gleichung (98)

$$u_0 = 0{,}9088$$

und daher folgt endlich nach Gleichung (155) die Dampfmenge auf beiden Seiten des Kolbens am Ende des Versuches:

$$m' + m_1' = 1{,}7554\, M,$$

während sie im Anfange war

$$m + m_1 = 1{,}7500\, M$$

und ferner ist die Wassermenge auf beiden Seiten:

am Ende 0,2446 M,
im Anfange 0,2500 M.

Am Schlusse des angenommenen Versuches ist also im Ganzen etwas mehr Dampf vorhanden, als im Anfange. Wie sich jedoch die Sache im Einzelnen verhält und welches Verhalten die Masse während des Vorganges zeigt, lässt sich leider bis jetzt aus den allgemeinen Gleichungen nicht bestimmen, sondern diese gestatten eben nur die Bestimmung des Endzustandes.

Offenbar schlägt sich im vorliegenden Falle auf der linken Seite des Kolbens im Allgemeinen Dampf nieder, weil derselbe ohne Wärmezuführung Arbeit verrichtet und rechts verdampft Wasser, weil die Masse daselbst ohne Wärmeabführung comprimirt wird und sonach Arbeit als Wärme aufnimmt. Jedenfalls folgt daraus, dass man im Anfange rechts immer etwas Wasser als vorhanden annehmen muss, weil sonst der Dampf überhitzt würde, für welchen Fall die Gleichungen keine Gültigkeit mehr haben. Das Letztere kann aber selbst bei Anwesenheit von Wasser eintreten, ja es fragt sich sogar, ob nicht im vorliegenden speciellen Beispiele die angenommene anfängliche Wassermenge noch zu gering war, d. h. ob während des Vorganges doch nicht alles Wasser verdampft und der Dampf schliesslich überhitzt ist; für diesen Fall wäre freilich obiges Rechnungsresultat als unrichtig zu betrachten.

Trotz dieser Unsicherheit in der Lösung des vorliegenden Problemes, habe ich doch die Rechnungen vorgeführt, so weit es eben die Grundformeln gestatten. Es scheint mir nämlich eine weitere Untersuchung dieses Problems von wesentlicher Bedeutung, zunächst weil die Rechnungsresultate durch gewisse geschickt angestellte, gleich näher zu bezeichnende Versuche vielleicht zu prüfen möglich wären und dann weil diese Aufgabe eine andere in sich schliesst.

Nimmt man nämlich an, die Verhältnisse seien so gewählt, dass obige Rechnungsresultate gültig sind, d. h. dass der Dampf am Ende des Versuches auch auf der Seite, auf welcher die Masse comprimirt wurde, noch gesättigt ist, so kann man sich jetzt den Kolben entfernt denken, ohne dass das eine weitere Veränderung im Zustande der ganzen Masse hervorbringen wird; Dampf und Wasser haben am Ende des Versuches gleiche Temperatur und sonach wird bei Beseitigung des Kolbens Dampf und Wasser auf beiden Seiten sich einfach mischen.

Ich glaube nun, der Vorgang muss ganz der nämliche sein, wenn man in der anfänglichen Position des Kolbens statt diesem sich eine *feste* Scheidewand denkt und durch eine Oeffnung in derselben einfach den Dampf *von der linken nach der rechten Seite strömen lässt.*

Am Ende ist ohne Zweifel der Zustand der ganzen Masse wieder der, wie ihn unsere obige Betrachtung unter den dort gemachten Voraussetzungen ergiebt. Beim Ueberströmen wächst nämlich der Druck *vor* der Mündung (auf der rechten Seite) in gleicher Weise, wie im obigen Falle. Die vorhin erwähnten Versuche könnten daher in der Art stattfinden, dass man Dampf aus einem Gefäss in ein anderes strömen lässt, in welchem ebenfalls gesättigter Dampf aber von geringerer Spannung und mit einer gewissen Quantität Wasser gemischt, befindlich ist.

Es fragt sich dann, ob die Spannung in beiden Gefässen am Ende wirklich der entspricht, welche die Theorie giebt. Freilich ist selbst dieser scheinbar einfache Versuch mit Schwierigkeiten verbunden, da die Bestimmung des an-

fänglich und schliesslich dem Dampfe beigemischten Wassers schwer, wenn nicht unter Benutzung der uns bis jetzt zu Gebote stehenden Mitteln unmöglich ist.

§ 40.

PROBLEM VI.

„In einem Gefässe befinden sich m Kilogr. Dampf und $(M - m)$ Kilogr. Wasser, beide von der Temperatur t. Welches ist die von aussen zuzuführende Wärme, wenn die Wärmezuführung bei constantem Volumen stattfindet und die Temperatur der Masse am Ende t_1 sein soll?

„Welche Dampf- und Wassermenge ist schliesslich vorhanden und bei welcher Temperatur t_2 ist eben alles Wasser in Dampf übergegangen?"

Unter Anwendung der bisherigen Bezeichnung ist das Volumen der Masse im Anfange

$$mu + Mw$$

und dasjenige am Ende

$$m_1 u_1 + Mw.$$

Da im vorliegenden Falle das Volumen constant bleiben soll, so findet sich durch Gleichsetzen beider Ausdrücke:

$$m_1 u_1 = mu.$$

Sonach ist die Dampfmenge am Ende:

$$m_1 = \frac{u}{u_1} m, \tag{158}$$

also vollständig bestimmt, wenn die Endtemperatur t_1 gegeben ist.

Die Zunahme der inneren Wärme findet sich ferner durch Integration der Gleichung IV

$$U = m_1 \varrho_1 - m\varrho + Mc\,(t_1 - t).$$

Da nun das Volumen ungeändert bleibt, also keine äussere Arbeit verrichtet wird, so giebt dieser Ausdruck zugleich die von aussen zuzuführende Wärme Q, also folgt:

$$Q = m_1 \varrho_1 - m\varrho + Mc\,(t_1 - t). \tag{159}$$

Ist, wie vorausgesetzt wurde, die Endtemperatur t_1 bekannt, so gab Gleichung (158) die Dampfmenge m_1 am Ende, durch Substitution dieses Werthes in Gleichung (159) folgt dann auch:

$$Q = mu\left(\frac{\varrho_1}{u_1} - \frac{\varrho}{u}\right) + Mc\,(t_1 - t) \tag{160}$$

für die von aussen zuzuführende Wärmemenge.

Die Entwickelung gilt natürlich nur so lange, als überhaupt gesättigter Dampf vorhanden ist; die Grenze ist dadurch bezeichnet, dass schliesslich die Dampfmenge der ganzen Masse gleich, d. h. alles Wasser in Dampf verwandelt, sonach $m_1 = M$ ist. Nennt man die Temperatur in diesem Momente t_2 und bezeichnet mit u_2 und ϱ_2 die zugehörigen Werthe von u und ϱ, so giebt Gleichung (158)

$$u_2 = \frac{m}{M} u, \tag{161}$$

woraus sich mit Hülfe der Tabelle II und III durch Interpolation die zugehörige Temperatur t_2 ergiebt. Schliesslich berechnet sich auf Grund der Gleichung (159) die von aussen erforderliche Wärme:

$$Q_2 = M\varrho_2 - m\varrho + Mc\,(t_2 - t). \tag{162}$$

Durch weitere Zuführung von Wärme würde der Dampf überhitzt und dann ist die Anwendung der vorstehenden Ausdrücke nicht mehr gestattet.

Denkt man sich, um die Untersuchung weiter auszudehnen, die m Kilogr. Dampf im Anfange seien aus Wasser der Temperatur 0^0 in der Art hergestellt worden, dass erst M Kilogr. Wasser von 0^0 auf t^0 erwärmt wurden (was die Wärmemenge Mct erforderte) und dass dann der Dampf unter constantem der Temperatur t entsprechendem Drucke p erzeugt wurde (wozu die Wärmemenge mr er-

forderlich war), so folgt die ganze erforderliche Wärme zur Erzeugung des Anfangszustandes

$$Mct + mr,$$

oder weil bekanntlich $r = \varrho + Apu$ ist:

$$Mct + m\varrho + m \,.\, Apu. \tag{163}$$

Aus dieser Masse haben wir dann durch weitere Wärmezuführung bei constantem Volumen m_1 Kilogr. Dampf von der Temperatur t_1 erzeugt, dazu allein brauchte man die durch Gleichung (159) gegebene Wärmemenge. Addirt man die Werthe von Gleichung (159) und (163), so ergiebt sich die Gesammtwärme, die W heissen mag, und die zur Erzeugung von m_1 Kilogr. Dampf unter den gemachten Voraussetzungen erforderlich ist:

$$W = Mct_1 + m_1 \varrho_1 + m \,.\, Apu$$

oder weil nach Gleichung (158) $m_1 u_1 = mu$ ist:

$$W = Mct_1 + m_1 \varrho_1 + \frac{p}{p_1} m_1 \,.\, Ap_1 u_1. \tag{164}$$

Hätte man hingegen die Dampferzeugung vorgenommen, wie es die *Regnault*'sche Formel voraussetzt, d. h. erst die Wassermenge M sofort von 0 auf t_1 erwärmt, und dann unter constantem der Temperatur t_1 entsprechendem Drucke die Dampfmenge m_1 erzeugt, so wäre die Gesammtwärme W_1 nach Gleichung (163)

$$W_1 = Mct_1 + m_1 \varrho_1 + m_1 \, Ap_1 u_1. \tag{165}$$

Ein Blick auf die beiden letzten Gleichungen zeigt, dass die für beide Arten der Herstellung des Dampfes von aussen erforderliche Wärmemenge verschieden ist und zwar nach der von uns angenommenen Methode geringer, als nach der, unter welcher *Regnault*'s Angaben gelten, dass aber die Verschiedenheit dieser Gesammtwärme nur daraus hervorgeht, dass die Arbeit bei der Bildung (letztes Glied) im ersteren Falle geringer ist, denn die beiden ersten Glieder sind in beiden Gleichungen gleich und repräsentiren die am Ende in der Masse enthaltene Wärme.

Soll am Ende des Versuches gerade die ganze Masse dampfförmig und wie angenommen, die Temperatur t_2 sein, so ist die erforderliche Gesammtwärme, wenn die Erzeugung nach der Angabe der vorliegenden Aufgabe geschieht, nach Gleichung (164) wegen $m_1 = M$:

$$W = M\left\{ct_2 + \varrho_2 + \frac{p}{p_2} A p_2 u_2\right\},$$

oder weil $\varrho_2 + ct_2$ die im Dampfe (Gewichtseinheit) enthaltene Wärme J_2 darstellt:

$$W = M\left\{J_2 + \frac{p}{p_2} \,.\, A p_2 u_2\right\}. \tag{166}$$

Hingegen wenn die Erzeugung unter der Annahme stattfinden, unter welcher die *Regnault*'sche Formel gilt:

$$W_1 = M\left\{J_2 + A p_2 u_2\right\}. \tag{167}$$

Ein specielles Beispiel soll wieder zur näheren Erläuterung dienen.

Es sei das Gewicht der in einem Gefässe befindlichen Masse M von Wasser und Dampf gerade 1 Kilogr., davon sei $m = 0{,}22$ Kilogr. dampfförmig und $M - m = 0{,}88$ Kilogr. als Wasser vorhanden; die Temperatur sei $t = 100^0$, sonach die Spannung des Dampfes gerade eine Atmosphäre; durch Wärmezuführung bei constantem Volumen soll die Dampfspannung auf 2 Atmosphären, also (nach Tabelle III) die Temperatur auf $t_1 = 120{,}60^0$ gesteigert werden.

Dann ist nach Tabelle III

$$u = 1{,}6449; \qquad u_1 = 0{,}8560 \text{ sowie:}$$
$$\varrho_1 = 479{,}97 \text{ und } A p_1 u_1 = 41{,}729.$$

Die Gleichung (158) giebt sonach für die Dampfmenge am Ende:

$$m_1 = \frac{1{,}6449}{0{,}8560} \,.\, 0{,}22 = 0{,}4227 \text{ Kilogr.}$$

und daher folgt die Wassermenge:

$$M - m_1 = 0{,}5773 \text{ Kilogr.}$$

Die während dieses Ueberganges von aussen zuzuführende Wärme ist ferner nach Gleichung (160) weil nach Tabelle III noch

$$\frac{\varrho_1}{u_1} = 560{,}7 \quad \text{und} \quad \frac{\varrho}{u} = 301{,}7 \quad \text{ist}$$

$$Q = 114{,}81 \text{ Calorien.}$$

Hätte man hingegen die ganze im Anfange vorhandene Wassermenge bei constantem Volumen in Dampf verwandeln wollen, so bestimmt sich die Endtemperatur auf folgende Weise:

Nach Gleichung (161) ist dann:

$$u_2 = \frac{m}{M} u = 0{,}22 \,.\, 1{,}6449 = 0{,}3617$$

und diesem Werthe entspricht nach Tabelle III die Temperatur von $t_2 = 152{,}22^0$ oder die Spannung von 5 Atmosphären. Nach Gleichung (162) wäre dazu der anfänglichen Masse von aussen die Wärmemenge:

$$Q_2 = 1 \,.\, 455{,}05 - 0{,}22 \,.\, 496{,}21 + 1{,}0224\,(152{,}22 - 100) \text{ oder}$$
$Q_2 = 399{,}48$ Calorien zuzuführen gewesen.

Eine weitere Wärmezuführung würde zwar Spannung und Temperatur noch weiter erhöhen, die Veränderungen würden aber dann nach anderen Gesetzen erfolgen, weil von jetzt an der Dampf in den überhitzten Zustand übergeht.

Rechnet man zu der im letzten Falle gefundenen Wärmemenge diejenige hinzu, die erst erforderlich war, 1 Kilogr. Wasser von 0^0 auf 100^0 zu erwärmen und dann unter constantem Drucke von 1 Atmosphäre die Dampfmenge von 0,22 Kilogr. zu erzeugen, so folgt nach Gleichung (166) die Gesammtwärme unter Benutzung von Tabelle III

$$W = 608{,}99 + {}^1/_5 \,.\, 44{,}082 = 617{,}86 \text{ Calorien.}$$

Wäre hingegen erst das Wasser von 0^0 auf $t_2 = 152^0{,}22$ erwärmt und dann unter constantem Drucke von 5 Atmosphären vollständig in Dampf verwandelt worden, dann wäre nach Gleichung (167) oder Gleichung (106) die erforderliche Gesammtwärme:

$$W_1 = 608{,}99 + 44{,}082 = 653{,}07 \text{ Calorien}$$

gewesen.

Die oben erhaltenen Formeln (158) bis (160) gelten natürlich auch für den umgekehrten Fall, d. h. wenn von aussen eine Wärmeentziehung oder Abkühlung stattfindet und dieser Fall ist von besonderer praktischer Wichtigkeit, denn hierauf gründet sich die Untersuchung des Vorganges im Condensator der Dampfmaschine, allerdings zunächst nur unter der Voraussetzung, dass die Abkühlung von aussen, nicht, wie dies gewöhnlich geschieht, durch Einspritzen von kaltem Wasser stattfindet.

Das oben berechnete Beispiel kann auch sofort zur Erläuterung dieses Falles dienen.

Befinden sich in einem Condensator 0,4227 Kilogr. Dampf und 0,5773 Kilogr. Wasser von der Temperatur 120,6° und entzieht man dieser Masse bei constantem Volumen die Wärmemenge von 114,81 Calorien, indem man vielleicht das Gefäss von aussen mit kaltem Wasser umgiebt, so sinkt nach obiger Rechnung die Temperatur auf 100°, die Spannung von 2 auf 1 Atmosphäre und die Dampfmenge im Gefässe beträgt am Ende 0,22 Kilogr., die Wassermenge sonach 0,88 Kilogr.

Wäre zuerst nur 1 Kilogr. Dampf und zwar von 5 Atmosphären Druck vorhanden gewesen und diesem von aussen die Wärmemenge von 399,48 Calorien bei constantem Volumen entzogen worden, so würde nach der oben durchgeführten Rechnung der gleiche Endzustand, wie im vorigen Falle, daraus hervorgegangen sein.

Die Resultate des vorliegenden Problems geben auch die Mittel an die Hand, ein anderes zu lösen, das bei Beurtheilung gewisser Vorgänge in Dampfmaschinenkesseln von Bedeutung ist. Denkt man sich die Feuerung und Dampferzeugung ist im vollen Gange, und die Dampfmaschine im Beharrungszustand, so ist die Wärmemenge bekannt, die in einer gewissen Zeit, etwa pro Sekunde in den Kessel tritt. Wird nun plötzlich die Verbindung zwischen Kessel und Dampfcylinder aufgehoben, so findet von

diesem Momente an die Dampferzeugung bei constantem Volumen statt. Da nun die Wärmeerzeugung auf dem Roste und sonach die Wärmezuführung in den Kessel nahezu unverändert bleibt, so lässt sich jetzt unter der Voraussetzung, Dampf und Wassermenge im Kessel sei im Momente des Absperrens bekannt, die Zunahme der Temperatur, also auch die des Druckes im Kessel nach Gleichung (160) von Sekunde zu Sekunde berechnen.

§ 41.

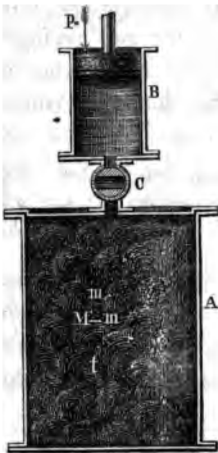
Problem VII.

„In einem Gefässe (Condensator) befinden sich m Kilogr. Dampf und $M-m$ Kilogr. Wasser, beide von der Temperatur t.

„In diesen Raum spritzt man μ Kilogr. Wasser ein, dessen Temperatur vor dem Einspritzen τ ist.

„Wenn nun nach dieser Operation die Temperatur im Condensator t_1 ist, welche Dampf- und Wassermenge ist schliesslich im Condensator enthalten und welche Einspritzwassermenge μ war erforderlich, wenn alle im Vorstehenden erwähnten Grössen mit Ausnahme von μ und der Dampfmenge m_1 am Ende als gegeben angesehen werden?“

Figur 8.



Man denke sich ein Gefäss A (Figur 8), den Condensator, in welchem die Dampfmenge m und Wassermenge $M-m$ von der gegebenen Temperatur t enthalten ist. Dieses Gefäss ist durch das Rohr C mit dem Cylinder B in der Art verbunden, dass durch einen Hahn im Rohre C die Verbindung zwischen Cylinder und Condensator beliebig unterbrochen oder hergestellt werden kann.

Der Hahn sei zunächst geschlossen und im Cylinder B befinde sich die Wassermenge μ von der Temperatur τ unter dem Drucke eines Kolbens der pro Quadrateinheit mit p_0 Kilogr. belastet ist. (Bei Condensatoren der Dampfmaschinen besteht der Druck p_0 im Drucke der äusseren Atmosphäre.)

Das Volumen V der Masse im Condensator ist dann unter Benutzung der bisherigen Bezeichnung

$$V = mu + Mw \tag{168}$$

und die in der Masse enthaltene innere Wärme

$$U = m\varrho + Mct. \tag{169}$$

Hingegen das Volumen V_1 des Einspritzwassers im Cylinder B ist:

$$V_1 = \mu w \tag{170}$$

und die in diesem enthaltene Wärme:

$$U_1 = \mu c \tau. \tag{171}$$

Daher ist zunächst die gesammte innere Wärme im Einspritzwasser und in der Dampf- und Wassermenge im Condensator:

$$U' = m\varrho + Mct + \mu c \tau. \tag{172}$$

Nun soll der Hahn im Rohre C so lange geöffnet werden, bis die ganze Wassermenge μ in den Condensator eingetreten ist, wobei ich aber ausdrücklich voraussetze, die anfängliche Temperatur τ des Einspritzwassers sei geringer als die Temperatur t im Condensator und die Spannung im Letzteren betrage nur wenig mehr als der äussere Atmosphärendruck.

Sobald die Wassermenge μ eingetreten ist, werde der Hahn geschlossen und nun fragt sich's, welches jetzt der Zustand der Masse im Condensator ist.

Die ganze in demselben befindliche Masse von Wasser und Dampf ist jetzt $M + \mu$, wovon m_1 dampfförmig sein mag. Ist nun die Temperatur t_1 und bezeichnet man mit u_1 und ϱ_1 die zugehörigen Werthe von u und ϱ, so folgt jetzt das Volumen der Masse:

$$m_1 u_1 + (M + \mu) w$$

und da dieses dem anfänglichen Volumen V des Condensators gleich ist, so folgt durch Gleichsetzen mit Gleichung (168) als erste hierher gehörige Hauptgleichung:

$$m_1 u_1 + \mu w = m u. \tag{173}$$

Die in der ganzen Masse enthaltene, oder die innere Wärme U'' ist ferner jetzt:

$$U'' = m_1 \varrho_1 + (M + \mu) c t_1. \tag{174}$$

Diese innere Wärme ist nun aber nicht etwa gleich der inneren Wärme U', wie sie Gleichung (172) giebt, die sich auf den Anfangszustand bezog, als das Einspritzwasser noch vom Condensatorraum getrennt war, sondern die innere Wärme U'' am Ende ist grösser, als die anfängliche.

Während des ganzen Vorganges ist nämlich von der Masse äussere Arbeit aufgenommen worden, weil der Kolben im Cylinder B unter dem constanten Drucke p_0 abwärts gegangen ist; da das anfängliche Volumen des Einspritzwassers nach Gleichung (170) μw betrug und der Kolben während des Einspritzens diesen Raum zurücklegte, so ist die vom äusseren Drucke p_0 verrichtete und von der Masse aufgenommene Arbeit:

$$p_0 \mu w,$$

und die dieser Arbeit entsprechende Wärmemenge:

$$A p_0 \mu w. \tag{175}$$

Um diesen Werth muss sonach die innere Wärme der Masse am Ende grösser sein, als im Anfange, und sonach ergiebt sich unter Benutzung der Gleichungen (172), (174) und (175) folgende zweite Hauptgleichung für vorliegendes Problem:

$$m \varrho + M c t + \mu c \tau + A p_0 \mu w = m_1 \varrho_1 + (M + \mu) c t_1. \tag{176}$$

Diese Gleichung, im Vereine mit Gleichung (173), lösst jetzt die Aufgabe vollständig, denn es lassen sich aus ihnen die beiden Unbekannten μ und m_1 bestimmen.

Die letzte Gleichung schreibt sich nämlich übersichtlicher:

$$m_1 \varrho_1 + \mu \left[c(t_1 - \tau) - A p_0 w\right] = m \varrho + M c (t - t_1).$$

Ferner ergiebt sich aus Gleichung (173):

$$m_1 = \frac{m u - \mu w}{u_1}, \tag{177}$$

und wenn man noch diesen Werth von m_1 in die letztere Gleichung einsetzt, so folgt zur Berechnung der Einspritzwassermenge μ nach einigen Reductionen:

$$\mu = \frac{m u \left(\frac{\varrho}{u} - \frac{\varrho_1}{u_1}\right) + M c (t - t_1)}{c (t_1 - \tau) - w \left(A p_0 + \frac{\varrho_1}{u_1}\right)}, \tag{178}$$

und ist hieraus μ bestimmt, so ergiebt sich die im Condensator am Ende enthaltene Dampfmenge m_1 nach Gleichung (177) und für die Wassermenge der Werth:

$$M + \mu - m_1,$$

Ein specielles Beispiel wird den Gebrauch der vorstehenden Ausdrücke weiter erläutern.

Im Condensator einer Dampfmaschine befindet sich eine Dampf- und Wassermenge von M Kilogr., davon sind

$$m = 0{,}90 . M$$

dampfförmig.

Die Spannung dieses Dampfes beträgt $1^1/_2$ Atmosphäre, sonach die Temperatur der Masse (Tabelle III):

$$t = 111{,}74^0.$$

Dann ist zunächst (Tabelle III):

$$u = 1{,}1224 \text{ und } \frac{\varrho}{u} = 433{,}9.$$

Das Einspritzwasser habe die Temperatur von

$$\tau = 12^0,$$

und stehe unter atmosphärischem Drucke, d. h. es sei

$$p_0 = 10334 \text{ Kilogr.}$$

Durch das Einspritzen des Wassers sinke die Temperatur im Condensator auf

$$t_1 = 35^0,$$

sonach ist nach Tabelle II:

$$u_1 = 25{,}541\,,$$

und nach Gleichung (111) die innere latente Wärme:

$$\varrho_1 = 547{,}44.$$

Hiernach folgt:

$$\frac{\varrho_1}{u_1} = 21{,}43.$$

Berücksichtigt man noch, dass die specifische Wärme des Wassers zu $c = 1{,}0224$; das Volumen der Gewichtseinheit Wasser zu $w = 0{,}001$ und $A = {}^1/_{424}$ anzunehmen ist, so folgt mit Rücksicht auf Gleichung (178) für vorliegenden Fall:

$$m u \left(\frac{\varrho}{u} - \frac{\varrho_1}{u_1}\right) = 416{,}69\, M,$$

$$M c\,(t - t_1) = 78{,}46\, M,$$

$$c\,(t_1 - \tau) = 23{,}52\,,$$

$$w \left(A p_0 + \frac{\varrho_1}{u_1}\right) = 0{,}05\,,$$ und daher

$$\mu = 21{,}10\, M.$$

Das Gewicht der Einspritzwassermenge soll also für vorliegenden Fall 21,10 Mal so gross sein, als die anfängliche Dampf- und Wassermasse im Condensator.

Nach Gleichung (177) bestimmt sich dann die Dampfmenge im Condensator am Ende

$$m_1 = 0{,}038\, M,$$

und daher die Wassermenge

$$M + \mu - m_1 = 22{,}062\, M,$$

Hätte man im vorliegenden Falle angenommen, dass im Anfange nur M Kilogr. Dampf im Condensator enthalten gewesen seien, so hätte sich unter den gleichen Verhältnissen ergeben:

$$\mu = 23{,}07\, M$$

für die Einspritzwassermenge, und

$$m_1 = 0{,}043\, M$$

für die Dampfmenge am Ende, sowie

$$24{,}028\, M$$

für die Wassermenge, die schliesslich im Condensator enthalten ist.

Bei Anwendung der Gleichung (178) zur Berechnung der Einspritzwassermenge bei Condensationsdampfmaschinen kann man das Glied:

$$w\left(Ap_0+\frac{\varrho_1}{u_1}\right)$$

unbedenklich in allen Fällen vernachlässigen, da es stets sehr klein ausfällt; man erhält dann einfacher für die Einspritzwassermenge:

$$\mu=\frac{mu\left(\frac{\varrho}{u}-\frac{\varrho_1}{u_1}\right)+Mc(t-t_1)}{c(t_1-\tau)}. \tag{179}$$

Der Zähler des Bruches der rechten Seite dieser Gleichung, sowie der der Gleichung (178) repräsentirt übrigens nichts Anderes, als die Wärmemenge, die man der Masse M bei constantem Volumen entziehen müsste, wenn die Temperatur von t auf t_1 sinken soll, wie die Untersuchung des Problemes VI und die dort gefundene Gleichung (160) lehrt.

Es braucht wohl kaum hervorgehoben zu werden, dass der im Vorstehenden von mir eingeschlagene Weg wesentlich von dem abweicht, der bisher bei Berechnung der Einspritzwassermenge für Condensationsdampfmaschinen eingeschlagen wurde.

Ohne weiter auf Vergleichungen einzugehen, sei nur bemerkt, dass bei der Aufstellung der bisher gebrauchten Formeln Voraussetzungen gemacht werden, welche nach den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie durchaus unstatthaft sind.

§ 42.

Die im Vorstehenden behandelten 7 Probleme, von denen nur das zweite und dritte schon von *Clausius*, wenn auch auf anderem Wege, behandelt wurde, werden genü-

gen, die Art und Weise näher zu bezeichnen, wie die Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie hier in Anwendung kommen müssen. Man hat nur im Auge zu behalten, dass von allen Hauptgleichungen allein diejenigen, welche die Veränderung der inneren Wärme ergeben, also die Gleichung:

$$dU = dQ - Ap\,dv,$$

die für die Gase in die Form:

$$dU = c_1\,dt \qquad \text{(Gleich. 40, Cap. II)}$$

und für die Dämpfe in die Form:

$$dU = Mc\,dt + d(m\varrho) \qquad \text{(Gl. IV, Cap. III)}$$

überging, für jeden Fall gelten, und dass diese eigentlich die Fundamentalgleichungen der mechanischen Wärmetheorie bilden; dass hingegen alle übrigen Gleichungen, also (I), (Ia), (Ib), [Capitel I] und (V) und (VI) [Capitel III] eben nur in Anwendung kommen dürfen, wenn man sicher ist, dass der Körper während des ganzen Verlaufes der mit ihm vorgenommenen Veränderungen einen Druck überwindet, der in jedem Augenblicke seiner Spannung gleich ist. Ist die letztere Bedingung nicht erfüllt, wie dies bei den meisten der im Vorstehenden behandelten Probleme (III bis VII) der Fall war, so ist, wie daselbst gezeigt wurde, die Behandlung der Aufgabe ebenfalls keinen weiteren Schwierigkeiten unterworfen.

Unter der Voraussetzung, dass die Masse von Dampf und Wasser während der Veränderungen einem Drucke ausgesetzt ist, der stets ihrer Spannung gleich ist, ergab die Gleichung (V) die von aussen zuzuführende Wärme:

$$dQ = Mc\,dt + d(mr) - \frac{mr}{T}\,dt.$$

Es bleibt mir nun noch übrig, aus dieser Gleichung abzuleiten, welche Bedeutung für die Dämpfe die Werthe von X und Y haben, die in der allgemeinen, für alle Körper geltenden Gleichung (I) des Capitel I vorkommen.

Vorstehende Gleichung schreibt sich zunächst, wie leicht zu übersehen ist:

$$dQ = \left[Mc + m\frac{dr}{dt} - \frac{mr}{T}\right] dt + r\,dm.$$

Nun ist aber offenbar:

$$dm = \frac{dm}{dt}\,dt + \frac{dm}{dv}\,dv,$$

und daher folgt auch:

$$dQ = \left[Mc + m\left(\frac{dr}{dt} - \frac{r}{T}\right) + r\frac{dm}{dt}\right] dt + r\frac{dm}{dv}\,dv. \qquad (180)$$

Nimmt man nun an, man habe es gerade mit der Gewichtseinheit Masse zu thun, so ist $M = 1$, und das Volumen nach der oft angewandten Bezeichnung:

$$v = mu + w.$$

Die Differentiation dieser Gleichung giebt unter der Voraussetzung, dass die Temperatur t, also auch u und w, constant ist, weil letztere Werthe nur Functionen von t sind:

$$dv = u\,dm,$$

oder

$$\frac{dm}{dv} = \frac{1}{u}.$$

Diese Formel in Gleichung (180) benutzt, giebt endlich auch:

$$dQ = \left[c + m\left(\frac{dr}{dt} - \frac{r}{T}\right) + r\frac{dm}{dt}\right] dt + \frac{r}{u}\,dv. \qquad (181)$$

In Capitel I, § 12, ergab sich aber nach Gleichung (Ia) als allgemeine Gleichung für alle Körper:

$$dQ = \frac{X}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}\,dt + \frac{C}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}\,dv.$$

Die Vergleichung der beiden letzten Ausdrücke giebt daher für gesättigte Dämpfe:

$$X = \left[c + m\left(\frac{dr}{dt} - \frac{r}{T}\right) + r\frac{dm}{dt}\right]\left(\frac{dt}{dp}\right) \qquad (182)$$

und

$$\frac{r}{u} = \frac{C}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}.$$

Die zweite dieser Gleichungen ist schon unter (93), § 28, gegeben, und dort fand sich zugleich, dass der Werth $\frac{r}{u}$ nichts anderes, als Y ist.

Die beiden Functionen X und Y sind sonach für Dämpfe ebenfalls vollkommen bestimmt.

Für den praktischen Gebrauch sind jedoch die Gleichungen (IV), (V) und (VI), § 33, weit bequemer.

Zum Schlusse der Betrachtungen über das Verhalten der gesättigten Dämpfe sei es gestattet, noch einige Worte über die von mir berechneten, im Anhange gegebenen, Tabellen beizufügen.

Eine Reihe der in denselben enthaltenen Zahlenwerthe erleiden möglicher Weise durch neue und zuverlässige Versuche später Abänderungen.

Hierher gehören wahrscheinlich zunächst die Werthe von u (Tabelle II, Columne 4 und Tabelle III, Columne 9); im Allgemeinen werden aber wohl diese Veränderungen nur in einer geringen gleichmässigen Vergrösserung oder Verkleinerung sämmtlicher Werthe bestehen, und zwar vielleicht bedingt durch eine genauere Bestimmung des Wärmeäquivalentes der Arbeitseinheit, d. h. des Werthes von A, den wir zu $^1/_{424}$ angenommen haben. Alles und besonders die schöne Uebereinstimmung der einzelnen auf sehr verschiedenen Wegen von *Joule* bestimmten Werthe von $\frac{1}{A}$ deutet aber darauf hin, dass diese wichtige Grösse nahezu richtig ist, so dass, wie ich erwähnte, der Werth von u beträchtliche Veränderungen kaum erleiden wird.

Das Gesagte bezieht sich auch auf die Werthe der Tabellen, die unter Zugrundelegung der Werthe von u erhalten wurden, also der Werthe von v und γ, d. h. des Volumens der Gewichtseinheit Dampf, und der Dichtigkeit, oder des Gewichtes der Volumeneinheit (Tabelle II, Columne 5 und 6, und Tabelle III, Columne 10 und 11).

Trotz dieser möglichen Unsicherheiten sind diese Werthe aber gewiss zuverlässiger, als die bisher gebrauchten, die

ihre Entstehung der durch keine einzige Thatsache genügend begründeten Annahme verdanken, der Dampf befolge auch im gesättigten Zustande das *Mariotte* und *Gay-Lussac*'sche Gesetz; einer Annahme, deren Unhaltbarkeit im Gegentheil durch die *Regnault*'schen Versuche über die Abweichungen der permanenten Gase von diesem Gesetze als schon erwiesen betrachtet werden kann, ganz abgesehen von den Ergebnissen, welche die mechanische Wärmetheorie liefert.

Was endlich die von mir angewandte Bezeichnung: „die in der Gewichtseinheit Dampf enthaltene Wärme J“ und „die innere latente Wärme ϱ der Gewichtseinheit Dampf, § 27, betrifft, so bedarf es in Hinblick auf die Behandlung der obigen 7 Probleme wohl keiner Entschuldigung, dass ich die Wissenschaft mit zwei neuen Begriffen und neuen empirischen Formeln bereichert habe. Ich glaube vielmehr, dass man dazu kommen muss, die bisherige Bezeichnung: „Gesammtwärme“ Q und „Verdampfungswärme“ r (oder, wie sie gewöhnlich genannt wird, „latente Wärme“) des Dampfes zu beseitigen. Beide Grössen enthalten noch ein fremdes Element, nämlich die in Arbeit verwandelte Wärme Apu unter der ganz speciellen Voraussetzung, dass die Dampferzeugung unter constantem, der Temperatur entsprechendem Drucke stattgefunden hat, wie es bei *Regnault*'s Versuchen*) der Fall war. Die Erzeugung des Dampfes kann aber auf unendlich verschiedene Weise stattfinden, indem ja der Druck, welchen der Dampf während seiner Bildung überwindet, nach ganz beliebigem Gesetz geändert werden kann; dann wird auch in jedem

---

*) *Regnault* hat bei seinen Versuchen nicht die Wärme beobachtet, welche zur Erzeugung des Dampfes von der Temperatur t unter constantem, dieser Temperatur entsprechendem, Drucke erforderlich war, sondern umgekehrt diejenige, welche der Dampf abgab, wenn er unter constantem Drucke sich niederschlug. In diesem Falle musste natürlich dieselbe Wärmemenge erscheinen, die unter gleichen Umständen zur Erzeugung des Dampfes erforderlich war.

einzelnen Falle die vom Dampfe während seiner Bildung verrichtete Arbeit, also auch die in Arbeit verwandelte Wärme, sowie die gesammte von aussen zuzuführende Wärme (Gesammtwärme) und die latente Wärme eine andere sein.

Nur die „im Dampfe enthaltene Wärme J“ und die „innere latente Wärme ϱ“ sind Grössen, die von der Art und Weise der Herstellung des Dampfes ganz unabhängig und einzig nur Functionen der Temperatur t sind und für die bis auf Weiteres nach § 31 und 32 gesetzt werden darf:

$$J = 573{,}34 + 0{,}2342\,t,$$

$$\varrho = 575{,}03 - 0{,}7882\,t.$$

Die erstere dieser Gleichungen habe ich auf Grund der Vergleichung mit *Regnault's* Versuchen in § 31 als genau richtig, die andere hingegen nur als für mittlere bei Dampfmaschinen vorkommende Temperaturen geltend hingestellt. Ich glaube aber, man kann bis auf Weiteres selbst diese zweite Gleichung als allgemein richtig betrachten, denn in der genaueren Gleichung (110), die in § 32 für ϱ gegeben wurde, ist noch ein Element, die specifische Wärme des Wassers bei constantem Drucke, enthalten, das man aus Gründen, welche in der Anmerkung auf S. 76 gegeben wurden, nur für annähernd richtig erklären kann.

B.

Vom Dampfe im überhitzten Zustande.

§ 43.

Die Untersuchungen der Eigenschaften des überhitzten Dampfes nach den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie sind mit besonderen Schwierigkeiten verbunden, weil bis jetzt durch Versuche sehr wenig über das Verhalten des

Dampfes in diesem Zustande festgestellt worden ist. Gewöhnlich nimmt man ohne Weiteres an, der überhitzte Dampf befolge das *Mariotte* und *Gay-Lussac*'sche Gesetz; directe Versuche von *Siemens*, auf die wir zurückkommen werden, sowie die Untersuchungen, welche *Regnault* mit anderen Gasen angestellt hat, deuten jedoch in gleicher Weise entschieden darauf hin, dass diese Annahme unstatthaft ist, wie es die oben für den gesättigten Dampf (der doch den Grenzzustand bildet) erhaltenen Resultate gethan haben.

Würde der Dampf wirklich das genannte Gesetz, selbst bis zum Sättigungszustand befolgen, so liesse sich sein Verhalten sehr einfach graphisch darstellen. Setzen wir nämlich das Volumen der Gewichtseinheit Dampf v, seine Spannung p und Temperatur t, so wäre, wie bei permanenten Gasen:

$$pv = R(a + t),$$

wobei R eine bestimmte, dem Wasserdampfe zukommende Constante ist. Führt man die absolute Temperatur $T = a + t$ ein, so folgt:

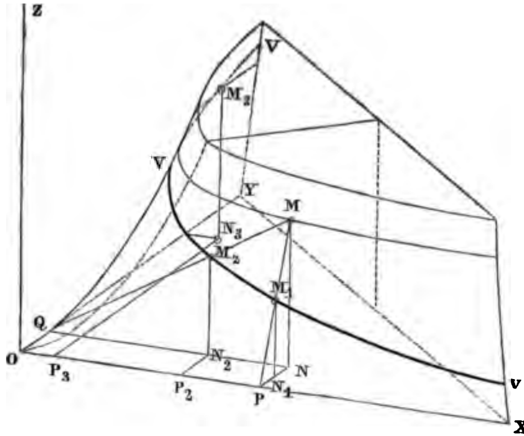
$$pv = RT$$

und das ist, wenn wir die Werthe p, v und T als die drei rechtwinkeligen Coordinaten eines Punktes M im Raum betrachten, die Gleichung der Fläche eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides.

Figur 9 repräsentirt den hier in Frage kommenden Theil dieser Fläche. In der Figur sind OX, OY und OZ die drei Coordinatenaxen, $OP = v$, $PN = p$ und $NM = T$ die Coordinaten des Punktes M. Sonach entspricht jeder Punkt dieser Fläche einem gewissen Zustande des Gases. Verbindet man die Punkte M mit P und M mit Q durch Gerade, so liegen bekanntlich diese Geraden in der Fläche des hyperbolischen Paraboloides. Dem Dampfe im gesättigten Zustande würde eine Reihe von Punkten entsprechen, die in der Curve VVV liegen, deren Gesetz zwar nicht bekannt ist, von der man aber so viel annehmen muss, dass sie in einer Art Schraubenlinie an der Fläche ansteigt, wie

es die Figur andeutet. Diese Curve giebt den Grenzzustand.

Fig. 9.



Ist nämlich von der Gewichtseinheit Dampf Volumen, Spannung und Temperatur gegeben, und fällt der Punkt M, sobald man die gegebenen Werthe in angedeuteter Weise als Coordinaten aufträgt, in die Curve VV, so ist der Dampf gerade gesättigt, kommt hingegen der Punkt M oberhalb dieser Curve in die Fläche zu liegen, so ist der Dampf überhitzt. Sieht man zu, wo die Verbindungslinien MP und MQ die Curve VV schneiden, welche Punkte durch M_1 und M_2 bezeichnet sind, und fällt man von diesen Punkten die Perpendikel M_1N_1 und M_2N_2 gegen die Coordinatenebene XOY, so ergiebt sich Folgendes:

Die Gewichtseinheit von gesättigtem Dampfe, welche dem Punkte M_1 entspricht, hat das gleiche Volumen OP, wie der gegebene überhitzte, seine Spannung PN_1 und seine absolute Temperatur M_1N_1 ist aber geringer. Man sagt daher: der überhitzte Dampf hat eine höhere Temperatur und Spannung, als gesättigter Dampf von gleichem Volumen (der Gewichtseinheit).

Betrachtet man hingegen den Punkt M_2, der gesättigtem Dampfe entspricht, dessen Volumen OP_2, Druck P_2N_2 und absolute Temperatur N_2M_2 ist, so erklärt sich auch, weil $P_2N_2 = PN = p$ ist, ferner, weil $MN > M_2N_2$ und $OP > OP_2$ ist, dass stets der überhitzte Dampf eine höhere Temperatur und ein grösseres Volumen besitzt, als gesättigter Dampf von gleicher Spannung.

Legt man endlich durch M einen Horizontalschnitt, so durchdringt dieser die Curve VV im Punkte M_3; dieser Punkt entspricht gesättigtem Dampfe vom Volumen OP_3, der Spannung P_3N_3 und der absoluten Temperatur $M_3N_3 = MN = T$; die Figur zeigt nun ohne Weiteres, weil $OP > OP_3$ und $PN < P_3N_3$ ist, die Richtigkeit des Satzes: der überhitzte Dampf hat ein grösseres Volumen und eine geringere Spannung, als gesättigter Dampf von gleicher Temperatur.

Der Punkt M kann nie unterhalb der Curve VV in die Fläche fallen, weil dies andeuten würde, dass Dampf existire, der eine höhere Spannung und ein kleineres Volumen, als gesättigter Dampf von gleicher Temperatur hätte, was unmöglich ist.

Projicirt man die Curve VV gegen die drei Coordinatenebenen, so giebt die Curve in der Ebene XOY die Beziehung zwischen dem Volumen v der Gewichtseinheit und der Spannung p für gesättigten Dampf.

Es ist bekannt, dass diese Curve Aehnlichkeit mit der gleichseitigen Hyperbel hat, was sich nun aus Vorstehendem leicht erklärt; die Projection der Curve auf die Ebene YOZ giebt eine Curve, welche die Beziehung zwischen der Spannung p und der absoluten Temperatur T für gesättigten Dampf angiebt, und die auch häufig dargestellt worden ist.

Endlich giebt die Projection auf die Ebene XOZ die Beziehung zwischen Volumen v der Gewichtseinheit und absoluter Temperatur T für saturirten Dampf.

Vorstehende Betrachtungen gelten natürlich nur für die Annahme, dass der Dampf selbst bis zum gesättigten Zu-

stande dem *Mariotte* und *Gay-Lussac*'schen Gesetze folge, eine Annahme, die unstatthaft ist.

Im Allgemeinen wird aber das wahre unbekannte Gesetz durch eine ähnliche krumme Fläche dargestellt werden können, und es müssen sich dann durch gleiche Betrachtungen die Verschiedenheiten zwischen gesättigtem und überhitztem Dampfe ebenso übersichtlich herausstellen.

§ 44.

Für ein beliebiges permanentes Gas war das *Mariotte* und *Gay-Lussac*'sche Gesetz ausgedrückt durch die Gleichung (20):

$$\frac{v}{v_1} = \frac{p_1}{p} \cdot \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_1},$$

wo α der Ausdehnungscoefficient des Gases ist und v und v_1 die Volumina, p und p_1 die Spannungen der Gewichtseinheit Gas bei der Temperatur t und t_1 bedeuten. Aus der letzten Gleichung ergiebt sich:

$$\frac{vp - v_1 p_1}{v_1 p_1} = \frac{\alpha(t - t_1)}{1 + \alpha t_1}, \tag{183}$$

wobei man annehmen kann, das Gas sei durch Erwärmung und Volumenveränderung aus einem Zustand in den anderen übergegangen. Ist die anfängliche Temperatur $t_1 = 0$ und bezeichnet man mit v_0 und p_0 die zugehörigen Werthe von v und p, so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\frac{vp - v_0 p_0}{v_0 p_0} = \alpha t. \tag{184}$$

Wird während dieser Operation die Spannung constant erhalten, so folgt $p = p_0$, und sonach:

$$\frac{v - v_0}{v_0} = \alpha t. \tag{185}$$

Wird hingegen das Volumen constant erhalten:

$$\frac{p-p_0}{p_0}=\alpha t. \tag{186}$$

Die beiden zuletzt angedeuteten Wege hat *Regnault* zur Bestimmung des Ausdehnungscoefficienten α für verschiedene Gase eingeschlagen und erhielt nicht nur auf beiden Wegen verschiedene Werthe von α, sondern dieselbe Methode gab auch α veränderlich, und zwar stellte sich unzweifelhaft fest, dass α mit dem Drucke, oder, was gleichbedeutend ist, mit der Dichtigkeit wächst, woraus also zu schliessen ist, dass selbst von permanenten Gasen das angenommene Gesetz nicht genau befolgt wird. Im Ganzen sind bei atmosphärischer Luft und anderen permanenten Gasen die Veränderungen von α unbedeutend, stärker jedoch ergeben sie sich bei der Kohlensäure, also bei einem Gas, das condensirbar ist; man schliesst daraus, dass die Abweichungen vom *Mariotte* und *Gay-Lussac*'schen Getetze und die Zunahme des Ausdehnungscoefficienten um so grösser werden, je mehr sich ein Gas dem Condensationspunkte nähert.

Man muss daher ferner schliessen, dass diese Abweichungen beim überhitzten Dampf vor Allem hervortreten müssen, und dass der Ausdehnungscoefficient desselben grösser, als der für andere nicht condensirbare Gase ist.

Auf die Richtigkeit dieser Annahmen deuten auch die Versuche von *Siemens**) hin. Er fand, dass wenn gesättigter Dampf von 1 Atmosphäre Spannung, also der Temperatur von 100°, gesondert vom Wasser unter constantem Drucke, weiter um 10°; 15,6°; 26,5°; 86,1° erhitzt wird, er sich beziehungsweise 5, 4, 3 und 2 Mal so stark ausdehnt, als atmosphärische Luft.

*G. Schmidt***) hat diese Resultate durch eine empirische Formel dargestellt.

---

*) „Civil Engineer and Architect's Journal". 1852. p. 294.

**) Das Ausdehnungsgesetz des überhitzten Dampfes. „Zeitschr. des österreich. Ingenieurvereins 1853" (5. Jahrg.). S. 127.

Für specielle Untersuchungen des Verhaltens des überhitzten Dampfes genügen leider diese Angaben nicht, da sie zunächst nur für Dampf von 100° Temperatur gelten. Jedenfalls deuten aber diese Werthe auf eine ziemlich starke Zunahme des Ausdehnungscoefficienten hin.

*Holtzmann**) findet durch Rechnung den Coefficienten

$$\alpha = 0{,}004233,$$

also ebenfalls grösser, als der Werth sich für permanente Gase ergiebt.

Der Mangel zuverlässiger Versuche gestattet mir leider nicht, aus den Hauptgleichungen der mechanischen Wärmetheorie nur einigermassen zuverlässige Schlüsse zu ziehen; nur für gesättigte Dämpfe lässt sich der Ausdehnungscoefficient bestimmen, der freilich hier eine etwas andere Bedeutung hat, als wir ihm bisher unterlegten.

Differentiirt man nämlich Gleichung (184), so folgt:

$$\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{pv}{p_0 v_0}\right). \tag{187}$$

Nun habe ich oben in Gleichung (96) für gesättigte Dämpfe die Beziehung:

$$Apu = B\, logn. \frac{T}{n}$$

gegeben. Setzt man annähernd v statt u, so folgt daraus:

$$pv = \frac{B}{A}\, logn. \frac{T}{n}$$

und für die Temperatur 0°, d. h. für $T = a$:

$$p_0 v_0 = \frac{B}{A}\, logn. \frac{a}{n}$$

und sonach:

$$\frac{pv}{p_0 v_0} = \frac{logn. \frac{T}{n}}{logn. \frac{a}{n}},$$

---

*) A. a. O. S. 22.

woraus durch Differentiiren folgt:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p v}{p_0 v_0}\right) = \frac{1}{T \log n . \frac{a}{n}}, \qquad (188)$$

und das wäre der Ausdehnungscoefficient für gesättigte Dämpfe; nennen wir den Werth α_1 und beachten, dass $a = 273$, $n = 100$ und $T = a + t$ ist, so folgt:

$$\alpha_1 = \frac{0{,}99572}{a + t}. \qquad (189)$$

Mit Hülfe dieser Formel ist folgende kleine Tafel berechnet:

t	α_1	t	α_1
0	0,003647	125	0,002502
25	0,003341	150	0,002354
50	0,003083	175	0,002223
75	0,002861	200	0,002105
100	0,002669		

Clausius *) giebt für α_1 Werthe, die von den vorstehenden nur wenig abweichen.

Man bemerkt, dass diese Werthe nicht grösser, sondern kleiner und zum Theil beträchtlich kleiner sind, als 0,003665, d. h. als der Ausdehnungscoefficient permanenter Gase.

Der Grund ist, dass α_1 nicht den Ausdehnungscoefficienten im gewöhnlichen Sinne, d. h. in dem Sinne darstellt, wie es vorhin erörtert wurde, sondern er gilt für den Fall, dass der Dampf während seiner Erwärmung einem wachsenden Drucke ausgesetzt ist, der in so starkem Verhältnisse wächst, wie das bei gesättigtem Dampfe geschieht.

Wird hingegen der Dampf überhitzt, d. h. ändert sich der Druck weniger stark, oder bleibt er gar constant, dann

---

*) „*Poggendorff*'s Annalen". B. 79, S. 515.

würde sich gewiss ein grösserer und vielleicht beträchtlich grösserer Ausdehnungscoefficient ergeben, als der der permanenten Gase ist.

§ 45.

Ebenso wichtig, wie es sein würde, wenn die Abweichungen des überhitzten Dampfes vom *Mariotte* und *Gay-Lussac*'schen Gesetz durch Versuche festgestellt würden, würde eine genaue Bestimmung der specifischen Wärme des Wasserdampfes und zwar sowohl der für constanten Druck, als der für constantes Volumen sein.

Die erstere, nämlich die specifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Drucke hat *Regnault* durch Versuche zu:

$$c = 0{,}4750$$

gefunden, und dieser Werth umfasst eigentlich Alles, was bis jetzt durch Versuche über das Verhalten des überhitzten Dampfes festgestellt worden ist; der Umstand, dass wir gerade *Regnault* diesen Werth verdanken, bürgt dafür, dass er nahezu richtig sein wird.

Die älteren, aber sicher unzuverlässigen Versuche von *De la Roche* und *Berard* geben hingegen

$$c = 0{,}847.$$

Die specifische Wärme bei constantem Volumen ist unbekannt.

Redtenbacher *) bestimmt sie zu:

$$c_1 = 0{,}305,$$

indem er bei seinen Rechnungen obigen *Regnault*'schen Werth von c zu Grunde legt.

Von Untersuchungen, die zum Zwecke hatten, beide Werthe auf theoretischem Wege abzuleiten, sind mir nur die von *Holtzmann* und *Rankine* bekannt.

Holtzmann *) findet für Wasserdampf:

---

*) A. a. O. Seite 24.

$$c = 1{,}6869 \quad \text{und} \quad c_1 = 1{,}5475$$

und giebt an, dass beide Werthe von der Spannung abhängen und zwar nicht blos bei Dämpfen, sondern überhaupt bei allen Gasen.

Die letztere Behauptung ist durch *Regnault*'s Versuche als unhaltbar nachgewiesen und wie wir früher bemerkten, schon vorher von *Clausius* bezweifelt worden.

Rankine *) behauptet, die specifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Drucke sei

$c = 0{,}305$ und die bei constantem Volumen
$c_1 = 0{,}194$.

Ich kenne diese Angaben nur aus einer Notiz *Rankine*'s in „Poggendorff's" Annalen Bd. 81, S. 172, indem ich mir das Original nicht verschaffen konnte; durch welche Betrachtungen *Rankine* auf diesen Werth kommt, ist mir daher unbekannt.

Die Wichtigkeit des Gegenstandes wird es rechtfertigen, wenn ich im Folgenden ebenfalls versuche, auf theoretischem Wege zunächst den Werth der specifischen Wärme des Dampfes bei constantem Volumen, über den durch Versuche noch Nichts festgestellt ist, zu bestimmen.

Ist der Dampf stark überhitzt, also weit von seinem Condensationspunkte entfernt, so befolgt er, wie man nach allen bisherigen Erfahrungen annehmen muss, das *Mariotte* und *Gay-Lussac*'sche Gesetz; sonach ist nach Seite 162

$$p v = R T = R (a + t).$$

Ist hingegen der Dampf im gesättigten Zustande, so ist nach Obigem:

$$p v = \frac{B}{A} logn. \frac{T}{n} = \frac{B}{A} logn. \frac{a + t}{n}.$$

Der Ausdruck rechts kann nun innerhalb ziemlich weiter Grenzen durch die Form:

$$R' (a' + t)$$

**) „Transactions" der königl. Gesellschaft zu Edinbourgh. V. XX.

dargestellt werden, wo R' und a' leicht zu bestimmende Constanten sind, wie die Entwickelungen in § 30 nachweisen; ja für Temperaturen wenig über 0° war sogar $a' = a$, denn die unter dieser Voraussetzung auf Tabelle II, Columne 9 berechneten Werthe der Dichtigkeit γ des Dampfes stimmen fast genau mit den Werthen, welche die mechanische Wärmetheorie ergab (Columne 6). Man muss daraus schliessen, dass überhitzter Dampf, der aus gesättigtem Dampfe von geringer Temperatur erzeugt wird, nahezu den gleichen Ausdehnungscoefficienten wie die Luft hat und dass die früher gemachte Bemerkung, dieser Ausdehnungscoefficient sei grösser, nur für Dämpfe von höherer anfänglicher Temperatur gilt. Jedenfalls muss man nach Allem annehmen, dass die Beziehungen zwischen Volumen v Spannung p und Temperatur t für überhitzten Dampf, innerhalb gewisser Grenzen sich durch eine Gleichung folgender Form darstellen lasse:

$$pv = R'(a' + t),$$

wobei R' und a' Werthe sind, die sich so langsam mit der Temperatur ändern, dass sie innerhalb gewisser Grenzen als constant betrachtet werden können.

So lange diese Unveränderlichkeit der Werthe von R' und a' angenommen werden darf, verhält sich der gesättigte Dampf wie ein permanentes Gas und dann müssen auch hier die Gleichungen (40) (30) gelten, die wir für solche Gase, in Capitel II gegeben haben, nämlich:

$$\frac{dU}{dt} = c_1$$

$$\frac{c - c_1}{R_1} = A,$$

wobei wir nur in Gleichung (30) R_1 statt R setzen.

Mache ich nun die sehr wahrscheinliche Annahme, dass bei Dämpfen, wie es bei permanenten Gasen der Fall ist, die specifische Wärme c_1 bei constantem Volumen eine constante Grösse ist, so gilt die Gleichung:

$$c_1 = \frac{dU}{dt}$$

auch für den Grenzzustand, d. h. wenn der Dampf eben in den gesättigten Zustand übergeht; für den saturirten Dampf war aber die innere Wärme:

$$J = U = 573{,}34 + 0{,}2342\, t$$

und daraus folgt:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{dU}{dt} = 0{,}2342$$

und sonach wäre die specifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Volumen:

$$c_1 = 0{,}2342,$$

bezogen auf die Gewichtseinheit. Aus dem Vorstehenden könnte man ferner schliessen, dass die im Dampfe von der Temperatur t enthaltene Wärme immer durch die Gleichung:

$$U = 573{,}34 + 0{,}2342\, t$$

gegeben ist „mag der Dampf im gesättigten oder überhitzten Zustand sich befinden.“

Was ferner die specifische Wärme bei constantem Drucke betrifft, so folgt dafür aus Gleichung (30):

$$c = c_1 + AR_1. \qquad (190)$$

Der Werth von R_1 lässt sich nun aber in folgender Weise bestimmen. Für gesättigten Dampf war:

$$pv = \frac{B}{A} logn. \frac{T}{n} \quad \text{oder}$$

$$pv = \left(\frac{B}{AT} logn. \frac{T}{n}\right) T$$

und diese Formel ergab für Temperaturen in der Nähe von 0° Werthe für die Dichtigkeit die von denen aus Formel

$$pv = R_1\, (a + t) = R_1\, T$$

abgeleiteten kaum verschieden waren; woraus zu schliessen ist, dass:

$$R_1 = \frac{B}{AT} logn. \frac{T}{n}$$

ist, d. h. dass der Werth $-\frac{logn. \frac{T}{n}}{T}$ in der Nähe von 0^0 nahe constant ist, was auch die Rechnung bestätigt.

Für $t = 0$ also $T = 273$ würde die letzte Gleichung geben:

$$AR_1 = \frac{B\, logn. \frac{a}{n}}{a} = 0{,}1120$$

und daher würde nach Gleichung (190) für die specifische Wärme des Dampfes bei constantem Drucke bezogen auf die Gewichtseinheit folgen:

$$c = 0{,}3462$$

und daher:

$$\frac{c}{c_1} = 1{,}47.$$

Sämmtliche Werthe darf ich auf Grund ihrer Ableitung zunächst nur für Temperaturen in der Nähe von 0^0 als richtig ausgeben.

Die beiden soeben bestimmten Werthe von c und c_1 sind etwas grösser, als sie *Rankine* giebt. Beide Bestimmungen geben aber die specifische Wärme des Dampfes bei constantem Drucke kleiner, als sie *Regnault* durch Versuche fand. Hätte ich statt der Gleichung (105 in § 31) für die innere Wärme die Gleichung (104) angewandt, die unter der Voraussetzung gilt, dass die Gesammtwärme nach *Regnault's* empirischer Formel berechnet wird und nicht nach den von mir angegebenen Formeln, so hätte sich unter den vorstehenden Voraussetzungen durch Differentiiren der Gleichung (104) ergeben:

$$c_1 = 0{,}305 - \frac{B}{T},$$

d. h. c_1 langsam mit wachsender Temperatur abnehmend; für $t = 0$ folgt daraus:

$$c_1 = 0{,}194$$

und dann in gleicher Weise, wie oben:

$$c = 0{,}305$$

und das sind genau die Werthe von *Rankine*, auf welche dieser wohl sicher durch andere Betrachtungen gelangt ist.

Unter Zugrundelegung der vorstehenden Ergebnisse und der Annahme, dass der überhitzte Dampf dem *Mariotte* und *Gay-Lussac*'schen Gesetze folgt, liessen sich leicht eine Reihe von Problemen lösen, welche nachweisen würden, dass es von grossem Vortheile wäre, bei Dampfmaschinen überhitzten, statt des gesättigten Dampfes in Anwendung zu bringen; die Resultate solcher Rechnungen stimmen zwar leidlich mit bisherigen Erfahrungen, besonders mit einigen hierhergehörenden Versuchen von *Hirn* überein, trotzdem führen derartige theoretische Untersuchungen zu keinen überzeugenden Resultaten. Ich unterlasse daher weitere Erörterungen. Um die Grundsätze der mechanischen Wärmetheorie nach dieser Richtung hin nutzbar zu machen, bedarf es nun vor allen Dingen Versuche mit überhitzten Dämpfen, besonders der Untersuchung, welcher Art die Abweichungen des Verhaltens des überhitzten Dampfes vom *Mariotte* und *Gay-Lussac*'schen Gesetze sind.

Capitel IV.

Ueber das Verhalten fester und flüssiger Körper.

---

§ 46.

Die Grundsätze der mechanischen Wärmetheorie sind zur Untersuchung der Wärmeerscheinungen bei festen und flüssigen Körpern bis jetzt nur in einigen wenigen speciellen Fällen und zwar von *James Thomson* bei Untersuchung über das Verhalten des Wassers angewendet worden; diese Untersuchungen führten aber sofort auf einige merkwürdige Entdeckungen, deren Richtigkeit später von *W. Thomson* und *Joule* auf experimentellem Wege bestätigt wurden.

Da gerade diese höchst interessanten Untersuchungen am schönsten die Richtigkeit der neuern Anschauungen über die Wärme bestätigen, so unterlasse ich nicht, im Folgenden noch speciell auf dieselben einzugehen und eine Reihe eigener Untersuchungen über das Verhalten fester und flüssiger Körper vorzuführen.

Man muss hier ähnlich, wie dies oben bei Gasen und Dämpfen der Fall war, unterscheiden, ob der in Betrachtung stehende Körper während der Versuche den Aggregatzustand ändert oder nicht. Wir betrachten zunächst den letzteren Fall, indem wir voraussetzen, der Körper bleibe im Laufe der mit ihm vorgenommenen Veränderungen fest oder flüssig.

Die allgemeinen Gleichungen aus Capitel I gelten auch hier. Sei das Volumen der Gewichtseinheit des Körpers v; der Druck, unter dem er sich befindet p (in dem früher schon in § 4 angedeutetem Sinne) und seine Temperatur t; so lauten die beiden Hauptgleichungen

$$\mathbf{C} = \mathbf{Y}\left(\frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{dp}}\right) - \mathbf{X}\left(\frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{dv}}\right) \tag{IIIa}$$

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{dY}}{\mathbf{dp}} - \frac{\mathbf{dX}}{\mathbf{dv}} \tag{II}$$

und die Formeln, welche die von aussen zuzuführende Wärme geben, wenn v um dv, p um dp und t um dt wächst:

$$\mathbf{dQ} = \mathbf{Xdp} + \mathbf{Ydv} \tag{I}$$

$$\mathbf{dQ} = \frac{\mathbf{Xdt} + \mathbf{Cdv}}{\left(\frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{dp}}\right)} \tag{Ia}$$

$$\mathbf{dQ} = \frac{\mathbf{Ydt} - \mathbf{Cdp}}{\left(\frac{\mathbf{dt}}{\mathbf{dv}}\right)} \tag{Ib}$$

Diese Gleichungen nehmen aber für vorliegende Untersuchungen eine weit einfachere Form an. Zunächst kennt man die Bedeutung der *Carnot'*schen Function und zwar ist nach Gleichung (32) § 15 zunächst

$$C = A\,(a + t).$$

Erwärmen wir nun den Körper (die Gewichtseinheit) bei constantem Volumen um dt, so ist die erforderliche Wärme nach der gewöhnlichen Bezeichnung

$$dQ = c_1\,dt,$$

wenn c_1 die specifische Wärme bei constantem Volumen bedeutet. Gleichung Ia giebt aber für vorliegenden Fall, wegen $dv = 0$

$$dQ = \frac{X}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}\,dt$$

und daraus folgt für alle Körper

$$X = c_1 \left(\frac{dt}{dp}\right). \tag{191}$$

Erwärmen wir hingegen den Körper bei constantem Drucke, so ist die erforderliche Wärme nach der gewöhnlichen Bezeichnung:

$$dQ = c\,dt,$$

wo c die specifische Wärme bei constantem Drucke ist. Gleichung (Ib) giebt aber für denselben Fall, weil $dp = 0$ ist:

$$dQ = \frac{Y}{\left(\frac{dt}{dv}\right)} dt$$

und daher folgt für alle Körper:

$$Y = c \left(\frac{dt}{dv}\right). \tag{192}$$

Benutzen wir nun die vorstehenden Werthe zur Umformung der obigen fünf allgemeinen Gleichungen, so ergeben sich folgende, ebenfalls für alle Körper geltenden Formeln:

$$A(a+t) = (c - c_1)\left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dv}\right), \tag{193}$$

$$A = \frac{d}{dp}\left\{c\left(\frac{dt}{dv}\right)\right\} - \frac{d}{dv}\left\{c_1\left(\frac{dt}{dp}\right)\right\}, \tag{194}$$

$$\left\{\begin{aligned} dQ &= c_1\left(\frac{dt}{dp}\right)dp + c\left(\frac{dt}{dv}\right)dv, && (195)\\ dQ &= c_1\,dt + \frac{A(a+t)}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}dv, && (196)\\ dQ &= c\,dt - \frac{A(a+t)}{\left(\frac{dt}{dv}\right)}dp. && (197)\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen gelten, wie der ganze Weg der Ableitung zeigt, selbst für den Fall, dass c und c_1 Veränderliche sind, und werden wahrscheinlich zukünftig immer in dieser Form in Gebrauch kommen, wenn durch Versuche

das Verhalten der Körper erst noch genauer bekannt geworden ist.

Unsere Kenntnisse dieses Verhaltens sind jetzt noch im höchsten Grade dürftig.

Von der Function

$$t = f(v, p)$$

wissen wir bei festen und flüssigen Körpern nur, dass unter atmosphärischem Drucke das Volumen v der Gewichtseinheit nahe gleichmässig mit der Temperatur t wächst, d. h. dass der Ausdehnungscoefficient unter diesen Umständen innerhalb gewisser Grenzen constant angenommen werden kann; nur das Verhalten des Wassers ist in dieser Beziehung, aber ebenfalls nur unter atmosphärischem Drucke, etwas genauer bekannt.

Was ferner die Wärmecapacitäten c und c_1 betrifft, so kennt man nur den Werth der specifischen Wärme bei constantem Drucke, also c, für verschiedene Körper genauer, aber ebenfalls blos für den Fall, dass der Körper unter atmosphärischem Drucke steht, und weiss nach *Regnault*, dass dieser Werth bei festen und flüssigen Körpern langsam mit der Temperatur wächst. Die specifische Wärme bei constanten Volumen, also c_1, ist nur für einige Metalle auf eigenthümliche Weise von *W. Weber* *) bestimmt worden. Nach diesen Bemerkungen kann es nicht auffallen, dass man bis jetzt nur in einzelnen Fällen nach den Grundsätzen der mechanischen Wärmetheorie das Verhalten der Körper zu bestimmen vermochte.

§ 47.

Hierher gehört zunächst eine Untersuchung von *Thomson*. Denken wir uns die Gewichtseinheit eines Körpers unter atmosphärischem Drucke, das Volumen desselben bei

---

*) „*Poggendorff*'s Annalen". Bd. 20, S. 177.

0^0 sei v_0, sein Volumen bei t^0 hingegen v, so setzt man gewöhnlich:

$$v = v_0 + \alpha v_0 t, \tag{198}$$

wo α der Ausdehnungscoefficient ist.

Die Differentiation giebt für constanten atmosphärischen Druck:

$$\left(\frac{dt}{dv}\right) = \frac{1}{\alpha v_0}. \tag{199}$$

Nennen wir das Gewicht des Wassers, also das Gewicht der Cubikeinheit (1 Cubikmeter) bei 0^0: γ, und das des Körpers γ_0, so ist das specifische Gewicht ε des letzteren:

$$\varepsilon = \frac{\gamma_0}{\gamma},$$

oder weil das Volumen v_0 der Gewichtseinheit Körpermasse:

$$v_0 = \frac{1}{\gamma_0}, \qquad \text{also}$$

$$v_0 = \frac{1}{\varepsilon \gamma}$$

ist, so ist nach Gleichung (199) auch:

$$\left(\frac{dt}{dv}\right) = \frac{\varepsilon \gamma}{\alpha}. \tag{200}$$

Stellt man sich nun vor, dass der Druck, der erst der atmosphärische war, um dp wächst, dass dabei aber von aussen weder Wärme zu- noch abgeführt wird, so ist $dQ = 0$, und daher nach Gleichung (197):

$$0 = c\,dt - \frac{A(a+t)}{\left(\frac{dt}{dv}\right)} dp,$$

oder

$$\frac{dt}{dp} = \frac{A(a+t)}{c\left(\frac{dt}{dv}\right)}. \tag{201}$$

Unter Benutzung von Gleichung (200) folgt hieraus:

$$dt = \frac{A(a+t)\alpha}{c\varepsilon\gamma} \cdot dp, \tag{202}$$

und das ist die Gleichung, welche, wenn auch in etwas

anderer Form, zuerst von *Thomson* gegeben wurde. Mit ihrer Hülfe bestimmt sich unter den gemachten Voraussetzungen die Temperaturerhöhung dt in Folge der Druckvermehrung dp.

Diese Gleichung darf jedoch nur in solchen Fällen in Anwendung kommen, wenn der Ausdehnungscoëfficient α von 0^0 bis t^0 constant anzunehmen ist, wie das allerdings bei den meisten festen und flüssigen Körpern der Fall ist.

So ist z. B. nach *Regnault* für Quecksilber $\alpha = 0{,}00018153$ (von 0^0 bis 100^0), ferner ist:

$$c = 0{,}03332\,; \quad \varepsilon = 13{,}596\,; \quad \gamma = 1000$$

und daher folgt für dieses, wenn wir überdies die Druckerhöhung in Atmosphären, statt in Druck pro Quadratmeter annehmen:

$$\Delta t = 0{,}000\,009\,772\,(a + t)\,\Delta p\,,$$

wobei wir wegen der hierbei stattfindenden höchst geringen Temperaturveränderung statt dt und dp die Wachsthümer endlich, also Δp und Δt setzen:

Nehmen wir das Quecksilber bei verschiedenen Anfangstemperaturen t und erhöhen wir den Gesammtdruck von 1 bis auf 10 Atmosphären, setzen wir sonach $\Delta p = 9$, so ergiebt sich die nachfolgende kleine Tabelle:

Anfangstemperatur t.	Temperaturerhöhung Δt.
0^0	$0{,}0243^0$
25^0	0,0262
50	0,0284
75	0,0306
100	0,0328.

Die Temperaturerhöhung ist also um so grösser, je grösser die Anfangstemperatur ist, im Uebrigen ist aber diese Erhöhung durch die gewöhnlichen Beobachtungsmittel nicht zu bestimmen.

Die *Thomson*'sche Formel gilt auch für permanente Gase. Da nun nach *Regnault* der Ausdehnungscoefficient für alle diese Gase nahezu gleich gross ist, fernerhin der Werth $c\varepsilon$, der nichts anderes als die sogenannte Raum-

capacität bei constantem Drucke angiebt, nach *Regnault* ebenfalls für alle permanenten Gase nahezu gleich gross ist, so folgt nach der *Thomson*'schen Gleichung (202) „dass alle permanenten Gase bei gleicher Anfangstemperatur und gleicher Druckerhöhung, die gleiche Temperaturerhöhung zeigen.“

Für das Wasser ist aber die Gleichung (202) nicht ohne Weiteres anwendbar, weil hier der Ausdehnungscoefficient α veränderlich ist, die Formel für dieses lässt sich aber ebenfalls leicht aufstellen.

Ist v_0 das Volumen der Gewichtseinheit Wasser bei 0° und v das bei t^0 so ist auf Grund der Versuche unter atmosphärischem Drucke:

$$v = v_0 (1 - \alpha t + \beta t^2 - \delta t^3), \tag{203}$$

wobei α, β und δ Constante sind, für die man nach *Kopp* annehmen soll:

für $t = 0$ bis 25°	für $t = 25$ bis 50°
$\alpha = 0{,}000061045$	$0{,}000065415$
$\beta = 0{,}000007783$	$0{,}0000077587$
$\delta = 0{,}00000003734$	$0{,}000000035408$

Durch Differentiation der Gleichung (203) folgt:

$$\left(\frac{dt}{dv}\right) = \frac{1}{v_0 (-\alpha + 2\beta t - 3\delta t^2)}, \tag{204}$$

wobei anzunehmen ist, die Ausdehnung erfolge unter constantem atmosphärischen Druck; substituirt man diesen Werth in Gleichung (201) so folgt für Wasser:

$$dt = \frac{A(a+t)}{c} v_0 (-\alpha + 2\beta t - 3\delta t^2)\, dp.$$

Setzen wir wieder aus gleichen Gründen, wie oben, die Zunahme Δt und Δp, beachten dass für Wasser $c = 1$ und $v_0 = 0{,}001$ ist und nehmen wir den Druck Δp in Atmosphären, so folgt:

$$\Delta t = 0{,}02437\, (a + t)(-\alpha + 2\beta t - 3\delta t^2)\, \Delta p. \tag{205}$$

Mit Hülfe dieser Formel ist die folgende Tabelle berechnet und dieser sind zugleich die Versuchsresultate von *Joule* beigefügt*).

Anfangstemperatur des Wassers $t^0 C$	Druckerhöhung Δp Atmosphären	Temperaturerhöhung Δt Nach Gleichung (205)	Nach *Joule*'s Experiment
1,2	24,34	—0,0069	—0,0083
5	24,34	+ 0,0025	+ 0,0044
11,69	24,34	+ 0,0193	+ 0,0205
18,38	24,34	+ 0,0363	+ 0,0314
30	24,34	+ 0,0547	+ 0,0544
31,37	14,64	+ 0,0344	+ 0,0394
40,4	14,64	+ 0,0434	+ 0,0450

Man erkennt aus den Zahlen dieser Tabelle die vortreffliche Uebereinstimmung der theoretischen Werthe mit den Versuchsresultaten. Unter 3,9 ⁰ Temperatur bewirkt die Compression eine Temperaturabnahme, darüber eine Zunahme.

§ 48.

Die vorstehenden Untersuchungen lassen aber sehr wichtige Erweiterungen zu, die mir das Mittel liefern, für einzelne Körper die specifische Wärme c_1 bei constantem Volumen zu bestimmen.

Findet nämlich die Compression eines Körpers ohne Zu- und Abführung von Wärme statt, so giebt Gleichung (196)

$$0 = c_1 \left(\frac{dt}{dp}\right) dp + c \left(\frac{dt}{dv}\right) dv$$

*) „On the Thermal Effects of Compressing Fluids." Phil. Magazine, V. 17. 1859. Mai.

und daher

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{c}{c_1}\frac{\left(\frac{dt}{dv}\right)}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}.$$

Nun ist aber nach Gleichung (193) allgemein:

$$\left(\frac{dt}{dp}\right) = \frac{A(a+t)}{(c-c_1)\left(\frac{dt}{dv}\right)};$$

daher folgt auch nach der letzten Gleichung:

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{c}{c_1}(c-c_1)\frac{\left(\frac{dt}{dv}\right)^2}{A(a+t)}, \qquad (206)$$

und diese Gleichung müsste uns in den Stand setzen, wenn alle Glieder der rechten Seite bekannt wären, aus der Zusammendrückung dv (ohne Zu- oder Abführung von Wärme) die Zunahme dp des Drucks zu bestimmen. Führt man den Werth dp in Atmosphären ein, und setzen wir

$$\frac{c}{c_1} = \varkappa$$

so folgt auch:

$$\frac{dp}{dv} = -c(\varkappa-1)\frac{\left(\frac{dt}{dv}\right)^2}{10334 \,.\, A(a+t)}. \qquad (207)$$

Nun besitzen wir einige Versuche über die Zusammendrückung von Flüssigkeiten und zwar von *Aimé* *), sowie von *Colladon* und *Sturm* **). Ich werde diese Resultate benutzen, um für Quecksilber und Wasser den Werth von $\varkappa$ oder weil c bekannt ist, von c_1 zu berechnen.

---

*) „Annales de chim. et de phys.“ S. III, T. VIII, pag. 257. „*Poggendorff's* Annalen“ 2. Ergänzungsband S. 228.

**) „Mémoires de l'academie des sciences“ (Paris 1827). Tome V des savants étrangers.

„Sur la compression des liquides.“ Gekrönte Preisschrift.

Nach den genannten Physikern kann man setzen, wenn v das anfängliche Volumen der Gewichtseinheit der Flüssigkeit ist:

$$dv = -\mu v\, dp,$$

wo μ der Beobachtungswerth von *Aimé* oder von *Colladon* und *Sturm* ist, daher schreibt sich

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{1}{\mu v}$$

und hiernach ergiebt sich aus (207) nach einigen Umformungen:

$$\varkappa - 1 = \frac{10334\, A\,(a + t)}{\mu v c \left(\frac{dt}{dv}\right)^2}. \tag{208}$$

Nun ist nach den genannten Versuchen der Werth von μ für eine Atmosphäre Druckerhöhung:

	Nach *Aimé* bei 12,6°	Nach *Colladon* und *Sturm* bei 0°
für Quecksilber	0,0000040	0,0000033
für Wasser	0,0000502	0,0000488

Benutzen wir nun zunächst Gleichung (208) für **Quecksilber.**

Nach Gleichung (200) ist für dieses

$$\left(\frac{dt}{dv}\right) = \frac{\varepsilon\gamma}{\alpha},$$

wobei:

$$\varepsilon = 13{,}596$$
$$\gamma = 1000$$
$$\alpha = 0{,}00018153$$

zu setzen ist.

Ferner ist das Volumen der Gewichtseinheit Quecksilber bei 0°

$$v_0 = \frac{1}{13596}$$

und das Volumen v bei 12,6°

$$v = v_0 (1 + \alpha t) = \frac{1{,}002287}{13596}.$$

Setzen wir die vorstehenden Werthe in Gleichung (208) ein und nehmen wir $t = 12{,}6^0$, indem wir zuerst den *Aimé*schen Werth von μ benutzen, so ergiebt sich, weil überdies $c = 0{,}03332$ ist:

$$\varkappa = \frac{c}{c_1} = 1{,}1237$$

und daher folgt, weil für Quecksilber die specifische Wärme bei constantem Drucke nach *Regnault* $c = 0{,}03332$ ist, die bei constantem Volumen $c_1 = 0{,}02965$.

Lege ich hingegen die Versuche ven *Colladon* und *Sturm* zu Grunde, so ergiebt sich für $t = 0^0$ aus Gleichung (208)

$$\varkappa = 1{,}1466$$

und daher hieraus die specifische Wärme des Quecksilbers bei constantem Volumen

$$c_1 = 0{,}02906.$$

Das Mittel aus den beiden Werthen ist:

$$c_1 = 0{,}02935$$

und daher
$$\frac{c}{c_1} = 1{,}1353,$$

sowie
$$c - c_1 = 0{,}00397.$$

Die vorstehenden Werthe sind hier das erste Mal bestimmt und erwarten ihre Bestätigung durch das Experiment.

Von besonderer Wichtigkeit ist aber die Bestimmung der specifischen Wärme c_1 bei constantem Volumen für **Wasser.**

Nach Gleichung (204) ist für Wasser:

$$\left(\frac{dt}{dv}\right) = \frac{1}{v_0(-\alpha + 2\beta t + 3\delta t^2)}$$

und daraus folgt unter Benutzung der dort gegebenen Werthe von α, β und δ, und weil

$$v_0 = 0{,}001 \text{ ist,}$$

für $t = 12{,}6^0$

$$\left(\frac{dt}{dv}\right) = + \frac{1}{0{,}000000115672} \text{ und } v = 0{,}0010004,$$

für $t = 0^0$

$$\left(\frac{dt}{dv}\right) = -\frac{1}{0{,}000000061045} \text{ und } v = 0{,}001,$$

daher ergiebt sich endlich nach Gleichung (208) und unter Zugrundelegung des Werthes von μ nach *Aimé*:

$$\varkappa = \frac{c}{c_1} = 1{,}00185,$$

woraus wegen $c = 1$ die specifische Wärme des Wassers bei constantem Volumen folgt:

$$c_1 = 0{,}9981.$$

Hingegen unter Annahme des Werthes von μ nach *Colladon* und *Sturm* folgt:

$$\varkappa = \frac{c}{c_1} = 1{,}000508 \quad \text{und daraus:}$$

$$c_1 = 0{,}9995;$$

das Mittel aus beiden Bestimmungen ist

$$c_1 = 0{,}9988$$

und daher:

$$\varkappa = \frac{c}{c_1} = 1{,}0012 \quad \text{und}$$

$$c - c_1 = 0{,}0012.$$

Beim Wasser ist sonach die specifische Wärme bei constantem Volumen nur sehr wenig von der bei constantem Drucke verschieden; dass dies wirklich richtig ist, möchte man schon daraus schliessen, dass das Wasser durch Compression eine so höchst geringe Temperaturzunahme zeigt, wie sich aus obigen Rechnungen und *Joule's* Versuchen ergeben hat. Auch die vorstehenden Ergebnisse müssen nun zunächst durch Experimente geprüft werden.

In ähnlicher Weise hätten sich noch andere Flüssigkeiten behandeln lassen; auch liessen sich jetzt, wenn man die vorstehenden Resultate für richtig hält, und annähernd die Werthe c und c_1 als constant betrachtet, für Quecksilber und Wasser mit Hülfe der Hauptgleichungen (193 bis 197) noch andere Fragen lösen. Derartige weitere Schlüsse sind

aber zu gewagt. Es scheint mir zweckmässiger, im Vorgehen solcher Untersuchungen mit den experimentellen gleichen Schritt zu halten.

§ 49.

Bisher nahmen wir an, der Körper ändere während der mit ihm vorgenommenen Veränderungen seinen Aggregatzustand nicht; im Folgenden soll aber der andere Fall betrachtet werden.

Der Uebergang eines flüssigen Körpers in einen dampfförmigen ist in Capitel III vollständig behandelt worden; es bleibt daher nur noch übrig, den Uebergang eines festen Körpers in den flüssigen Zustand, das Schmelzen zu untersuchen; dabei soll aber der Kürze des Ausdruckes wegen, zunächst nur der Uebergang des Eises in Wasser behandelt werden; die allgemeinen hierher gehörigen Untersuchungen gelten auch für das Schmelzen jedes andern Körpers.

Denken wir uns in einem Gefässe gerade ein Kilogramm Eis, von der Temperatur 0° und zwar unter dem Drucke von 1 Atmosphäre; führt man diesem Eise Wärme zu, während der Druck constant erhalten wird, so geht das Eis nach und nach in Wasser über, die Temperatur bleibt aber dabei so lange 0°, bis alles Eis in Wasser verwandelt ist.

Erst von diesem Momente an beginnt eine Temperaturerhöhung, wenn die Wärmezuführung weiter fortgesetzt würde. Die Wärmemenge, welche dazu gehört, um unter constantem Drucke von 1 Atmosphäre gerade ein Kilogr. Eis von 0° Temperatur vollständig in Wasser von 0° zu verwandeln, ist durch Versuche bekannt und zwar beträgt sie nach den sichersten Versuchen von *De la Provostaye*:

79,01

und nach denen *Regnault*'s

79,06 Wärmeeinheiten.

Wir benutzen im Folgenden den Mittelwerth und bezeichnen ihn mit r, setzen also

$$r = 79{,}035.$$

Diesen Werth nennt man gewöhnlich, wie bei dem Dampfe, die „latente Wärme.“

Man erkennt aus dieser Darstellung sofort, dass die Erscheinung beim Schmelzen genau der gleicht, wie sie sich beim Verdampfen zeigte; während des Ueberganges aus dem einen in den andern Aggregatzustand unter constantem Drucke ändert sich, wie wir oben hervorhoben, die Temperatur nicht, obgleich dem Körper eine bedeutende Wärmemenge zugeführt wird. Wir müssen daraus schliessen, dass auch im Uebrigen der Vorgang beim Schmelzen ganz analog dem beim Verdampfen ist, dass sonach ein Theil der zugeführten Wärme r zur Ueberwindung der Cohäsion, der andere zu äusserer Arbeit verbraucht wird, weil während dieses Vorganges bekanntlich Volumenveränderungen stattfinden.

Ferner muss man schliessen, dass ebenso, wie beim Verdampfen, der Uebergang aus dem festen in den flüssigen Zustand unter verschiedenem Drucke auch bei verschiedenen Temperaturen stattfindet und dass auch hier die Temperatur **nur** eine Function des Druckes **nicht** gleichzeitig des Volumens der Masse ist, so lange diese aus Eis und Wasser gleichzeitig besteht.

Wir könnten daher eben so gut, wie beim Dampfe gesättigtes und überhitztes oder ungesättigtes Wasser unterscheiden. Gesättigtes Wasser ist solches, welches sich sofort bei der geringsten Wärmeentziehung zum Theil in Eis verwandelt, ist der Druck z. B. eine Atmosphäre, so ist das Wasser gerade bei 0° Temperatur gesättigt; muss hingegen bei constantem Drucke dem Wasser erst eine gewisse Wärmemenge entzogen werden, ehe es sich in Eis zu verwandeln beginnt, so ist es ungesättigt oder überhitzt; solches Wasser, welches unter dem Drucke von einer Atmosphäre eine Temperatur besitzt, die über 0° liegt, ist daher immer ungesättigt.

Ist der Druck, unter dem das Wasser steht ein anderer, als eine Atmosphäre, dann ist auch die Sättigungstemperatur, oder wie man gewöhnlich sagt, die „Schmelztemperatur" eine andere, beide, Druck und Temperatur stehen aber, wie erwähnt, in einer unbekannten, gewissen Beziehung zu einander und entsprechende Versuche müssten für gesättigtes Wasser eine ähnliche Curve geben, wenn man die Schmelztemperatur als Abscisse und den Druck als Ordinate aufträgt, wie dies beim gesättigten Dampf der Fall ist, bei dem man gewöhnlich in dieser Art verfährt. Der Verlauf dieser Curve für gesättigtes Wasser ist aber, wie die folgenden Betrachtungen zeigen werden, wesentlich von der des Dampfes verschieden.

Dass die Schmelzungstemperatur des Eises, oder wie ich es nennen werde, die „Sättigungstemperatur des Wassers" mit dem Drucke variirt und zwar dass vom Gefrierpunkte an, bei weiterem Sinken der Temperatur der Sättigungsdruck **wächst,** d. h. dass mit Erhöhung des Druckes eine Erniedrigung des Gefrierpunktes verbunden ist, wurde zuerst von *James Thomson* *) und dann von *Clausius* **) theoretisch nachgewiesen und von *William Thomson* ***) durch Versuche vollkommen bestätigt. In gleicher Weise bestätigen diese merkwürdigen Thatsachen auch die Versuche von *Bunsen* am Wallrath und Paraffin und von *Hopkins* an Wallrath, Wachs, Schwefel und Stearin. Die folgenden Betrachtungen werden unter anderem auch auf die von *James Thomson* und *Clausius* gegebenen Ausdrücke führen.

Da wir es in der Folge grösstentheils mit Temperaturen unter 0° C. zu thun haben, und somit die Temperatur *t*

---

*) „Transactions der königlichen Gesellschaft zu Edinburgh" Vol. XVI.
„Cambridge and Dublin Mathematical Journal" 1850.
**) „*Poggendorff*'s Annalen." Bd. 81, S. 168.
***) „Proceedings of the Roy. Soc. of Edinb." 1850.
„Philosoph. Magazine" 1850. Bd. XXXVII, p. 123.
„*Poggendorff*'s Annalen." Bd. 81, 1850, p. 163.

theils negativ, theils positiv wäre, so ist es zweckmässig, den Nullpunkt der Thermometerscala tiefer zu legen und zwar eignet sich hierzu am besten der absolute Nullpunkt; ich zähle also von jetzt an die Temperaturen von -273^0 ab und bezeichne die Temperatur mit T, sodass wie früher $T = a + t = 273 + t$ und die Temperatur des Gefrierpunktes des Wassers unter einer Atmosphäre Druck bei 273^0 liegt.

Denke ich mir nun in einem Gefässe ein Kilogr. Eis unter dem Drucke p (pr. Quadrateinheit gerechnet) stehend; die Temperatur sei T_0, hingegen die Schmelzungstemperatur, welche dem Drucke p entspricht, sei T, so lässt sich fragen, welche Wärmemenge erforderlich ist, das Eis bei constantem Drucke vollständig in Wasser von der Temperatur T zu verwandeln.

Setzen wir die specifische Wärme des Eises bei constantem Drucke c_0, so ist offenbar die Wärmemenge um das Eis erst von T_0 auf T zu erwärmen,

$$\int_{T_0}^{T} c_0 \, dT$$

und ferner sei die Wärme, um aus 1 Kilogr. Eis von T^0 Temperatur Wasser von T^0 bei dem constanten Drucke p zu bilden r, wo r wahrscheinlich von T in ähnlicher Weise abhängig ist, wie dies bei der Verdampfungswärme der Fall ist. Wie schon erwähnt, nennt man r die „latente Wärme", ich werde dafür den Namen „Schmelzwärme" gebrauchen.

Die Wärmemenge Q, welche das Eis erfordert, um, unter den gemachten Annahmen in Wasser überzugehen ist sonach:

$$Q = \int_{T_0}^{T} c_0 \, dT + r \tag{209}$$

und diese wollen wir analog wie dies beim Dampfe geschah, die „Gesammtwärme" nennen.

§ 50.

Während dieser Operation wird aber „äussere Arbeit“ verrichtet, die nun zu bestimmen ist. Während das Eis von T_0 auf T erwärmt wurde, fand kein Schmelzen statt, wohl aber wird schon dabei eine Volumenveränderung, sonach eine Ueberwindung des äusseren Druckes p, also Arbeitverrichtung stattgefunden haben. Wir werden diese Volumenveränderung gegen die vernachlässigen, die bei der Verwandlung des Eises in Wasser stattfindet, sonach bleibt nur noch die Arbeit zu bestimmen übrig, welche während des Schmelzens verrichtet wird.

Es sei nun v das Volumen der Gewichtseinheit Wasser bei T^0 und w das des Eises bei der gleichen Temperatur. Hat man sonach im Anfange M Kilogr. Eis ohne Wasser, so ist das Volumen desselben

$$Mw \tag{210}$$

und ist am Ende der Erwärmung unter constantem Drucke p, die entstandene Wassermenge m, so ist das Volumen der Masse:

$$(M - m)\, w + m\, v = Mw + m\,(v - w). \tag{211}$$

Die äussere Arbeit ist: $\int p\,dv$, integrirt zwischen den Grenzen Mw und $Mw + m\,(v - w)$ und da p constant ist, also sich die Integration ausführen lässt, so folgt für diese Arbeit:

$$mp\,(v - w)$$

und daher die dieser Arbeit entsprechende Wärmemenge

$$W = m\,Ap\,(v - w),$$

oder wenn wir auch hier (wie beim Dampfe) die Differenz zwischen Volumen der Gewichtseinheit Wasser (v) und dem des Eises (w) mit u bezeichnen, so folgt diese Wärmemenge:

$$W = m\,Apu, \tag{212}$$

oder wenn gerade ein Kilogr. Eis in Wasser übergeht,

$$W = Apu. \tag{213}$$

Die Gesammtwärme ist nun nach Gleichung (209) bekannt; ziehen wir davon die beim Schmelzen in äussere Arbeit verwandelte Wärme ab, so folgt die im Wasser enthaltene Wärme, die wir auch hier mit J bezeichnen:

$$J = Q - Apu. \tag{214}$$

Dieser Werth giebt also an, wie viel in einem Kilogr. Wasser von T^0 mehr Wärme enthalten ist, als in Eis von $T_0{}^0$, beide unter gleichem Drucke p angenommen.

Hätte die Gewichtseinheit Eis schon im Anfange die entsprechende Schmelztemperatur T und sollte dieses unter dem dieser Temperatur entsprechenden Drucke p in Wasser übergeführt werden, so ist die erforderliche Wärmemenge nach Obigem r.

Da nun hierbei die Wärmemenge Apu in Arbeit verwandelt wird, so giebt der Werth

$$\varrho = r - Apu \tag{215}$$

den Ueberschuss der in ein Kilogr. gesättigtem Wasser von der Temperatur T enthaltenen Wärme über die im Eise von gleicher Temperatur und Spannung enthaltene. Ich nenne auch hier ϱ die innere latente Wärme des gesättigten Wassers.

Die in Arbeit verwandelte Wärme Apu lässt sich nun auch hier durch einen andern Ausdruck geben.

Nehme ich wieder an, in einem Gefäss befinden sich M Kilogr. Eis und Wasser und zwar $(M - m)$ Kilogr. Eis und m Kilogr. Wasser unter dem Drucke p; so war das Volumen dieser Masse nach Gleichung (211) und weil

$$(v - w) = u \text{ ist: } V = Mw + mu,$$

oder wenn die ganze Masse gerade 1 Kilogr. wiegt und ihr Volumen wieder mit v bezeichnet wird:

$$v = w + mu.$$

Führt man dieser Masse bei constantem Drucke die Wärmemenge dQ zu, so bleibt während dieser Zuführung die Temperatur constant und ebenso sind die Werthe von v und w unveränderlich, weil diese nur Functionen von t sind.

Daher folgt die Zunahme des Volumens:

$$dv = u\,dm. \tag{216}$$

Die von aussen zuzuführende Wärme ist aber, weil die Temperatur constant ist, und die Eismenge dm in Wasser übergeht:

$$dQ = r\,dm, \tag{217}$$

oder wenn wir dm aus Gleichung (216) bestimmen

$$dQ = \frac{r}{u}\,dv. \tag{218}$$

Für diese Wärmemenge geben aber die Hauptgleichungen I und Ia, weil Druck und Temperatur während des angenommenen Vorganges constant bleiben, also $dp = 0$ und $dt = 0$ ist:

$$dQ = Y\,dv \tag{219}$$

und

$$dQ = \frac{C}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}\,dv. \tag{220}$$

Durch Vergleichung dieser 3 Gleichungen findet sich also:

$$Y = \frac{r}{u}, \tag{221}$$

sowie:

$$\frac{r}{u} = \frac{C}{\left(\frac{dt}{dp}\right)} \tag{222}$$

genau wie sich's auch beim Verdampfen ergab. Da nun

$$C = A\,(a + t) = A\,T \text{ und}$$
$$dt = d\,T$$

ist, so folgt auch, weil p für den Sättigungszustand mit dem wir es hier zu thun haben, nur Function von T ist:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{A\,u\,T} \tag{223}$$

und daher findet sich auch die bei der Bildung des Wassers in Arbeit verwandelte Wärme:

$$Apu = \frac{pr}{T\frac{dp}{dt}}. \tag{224}$$

§ 51.

Die vorstehenden Entwickelungen bilden nun die Grundlage bei Beurtheilung des Vorganges beim Schmelzen. Leider stehen uns nur sehr wenig Versuchsresultate zu Gebote, um mit Hülfe derselben und den obigen Gleichungen weiter zu schliessen; soweit es die bekannten Versuche gestatten, sollen im Folgenden die theoretischen Untersuchungen ausgedehnt werden.

Unter dem Drucke von 1 Atmosphäre ist die Schmelzungstemperatur 0^0 oder $T = 273^0$.

Das Volumen der Gewichtseinheit Wasser ist bei dieser Temperatur:

$$v = 0{,}001.$$

Das Volumen der Gewichtseinheit Eis ist hingegen:

$$w = 0{,}001087.$$

Ferner ist nach Obigem die Schmelzwärme für diese Temperatur:

$$r = 79{,}035.$$

Mit Hülfe dieser Werthe ergiebt sich nun zunächst

$$u = v - w = - 0{,}000087$$

also negativ.

Setzen wir diese Werthe in Gleichung (223) ein, so folgt für $T = 273^0$ oder für den Schmelzpunkt unter atmosphärischem Drucke, wenn wir zugleich dp in Atmosphären, statt in Druck pro Quadrateinheit einführen.

$$\frac{dp}{dT} = -\frac{79{,}035 \,.\, 424}{0{,}000087 \,.\, 273 \,.\, 10334} \text{ oder}$$

$$\frac{dp}{dT} = -136{,}53 \text{ und} \tag{225}$$

$$\frac{dT}{dp} = -0{,}007324. \tag{226}$$

Die letzte Gleichung ist diejenige, welche *J. Thomson* zuerst entwickelt hat (*Thomson* giebt $\frac{dT}{dp} = -0{,}0075$), und zeigt also das überraschende Resultat, dass mit einem Wachsen des Druckes p (in der Nähe des sogenannten Gefrierpunktes) eine Abnahme der Schmelztemperatur verbunden ist; d. h. unter höherem Drucke als einer Atmosphäre gefriert das Wasser erst bei einer Temperatur unter 0° *Celsius*.

Die Richtigkeit dieser Vorhersagung ist durch die Versuche von *W. Thomson* ausser allen Zweifel gesetzt. Dieser fand, dass bei einer Vermehrung des Druckes auf 8,1 und 16,8 Atmosphäre die Schmelztemperatur des Eises resp. um 0,059 und 0,129° unter 0° lag; für eine Atmosphäre Druckerhöhung giebt das eine Temperaturerniedrigung von resp. 0,00727 und 0,00767, was mit den obigen Entwickelungen im schönsten Einklange steht. *Mousson* *) hat mit Hülfe eines eigenthümlichen Apparates Wasser selbst noch bei — 20° flüssig erhalten, indem er dasselbe einem sehr hohen Drucke (einige tausend Atmosphären) aussetzte; auch dieser Versuch ist ein Beweis der Richtigkeit der obigen Betrachtungen. Denken wir uns jetzt die Temperaturen T als Abscissen und den zugehörigen Druck p als Ordinate aufgetragen, so würde sich die Spannungscurve für gesättigtes Wasser ergeben. Von dieser Curve ist bis jetzt nur der Lauf eines Elementes bekannt und zwar desjenigen, dessen Abscisse $T = 273°$ und dessen Ordinate $p = 1$ Atmosphäre ist.

Aus der Gleichung (225) findet sich aber:

$$dp = -136{,}53 \,.\, dT$$

---

*) „*Poggendorff*'s Annalen." Bd. 105, S. 161.

und daraus schliesst man, dass die Tangente an diesen Punkt nahezu normal zur Abscissenaxe steht, dass also die Curve sehr steil abfällt und zwar sich mit wachsender Abscisse der Abscissenaxe nähert.

Die Spannungscurve für gesättigten Dampf zeigt gerade das entgegengesetzte Verhalten.

Dürfte man annehmen, dass Gleichung (225) noch bis zu einer Temperaturerniedrigung von 1° gültig ist, so würde sich schliessen lassen, dass das Wasser ungefähr unter einem Drucke von 136 Atmosphären stehen müsste, damit es erst bei — 1° C. gefriere. Diese Betrachtung zeigt, dass jedenfalls der Nullpunkt der Thermometer sehr stabil ist, es gehören schon sehr starke Druckveränderungen dazu, um bei der Bestimmung desselben bemerkbare Differenzen zu erhalten. Bekanntlich ist das mit dem Siedepunkt nicht der Fall, bei dessen Bestimmung an Thermometern die gewöhnlichen Variationen im Atmosphärendruck beachtet werden müssen.

Steht das Eis unter einem Drucke, der weniger als eine Atmosphäre beträgt, so muss der Schmelzpunkt erhöht werden. Unter dem Recipienten einer Luftpumpe beginnt das Gefrieren des Wassers also schon bei höherer Temperatur und das müsste sich beobachten lassen, wenn man eine Mischung von Eis und Wasser unter den Recipienten bringt, indem dann einfach die Temperatur dieser Mischung sich erhöhen müsste. Dass bis jetzt diese Erscheinung unbeachtet geblieben ist, erklärt sich dadurch, dass diese Erhöhung selbst im fast luftleeren Raum wahrscheinlich ausserordentlich gering ist, und durch besondere Instrumente und Vorrichtungen bestimmt werden müsste.

Die Spannungscurve des Wassers hat jedenfalls einen Verlauf, wie es nebenstehende Figur (10) andeutet. 0 ist der Anfangspunkt der Coordinaten; als Abscissen sind die Temperaturen aufgetragen und zwar entspricht der Punkt P_1 gerade + 1° C. und P_2 der Temperatur — 1°. Die Or-

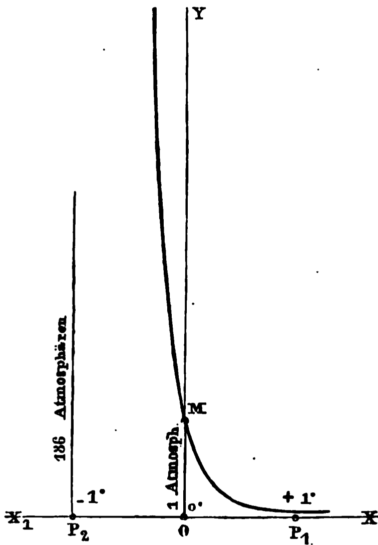


Fig. 10.

dinate im Nullpunkte O sei $OM = 1$ Atmosphäre; dann ist nach Obigem die der Temperatur — 1° C. entsprechende Ordinate, etwa 136; während die für + 1° nahezu 0 ist. Experimente zur Feststellung des Laufes der Curve zwischen 0° bis 1° sollten wohl nicht zu schwierig sein, und würden gewiss in Verbindung mit den gegebenen Formeln zu interessanten Aufschlüssen führen.

§ 51.

Für die Gesammtwärme des Wassers wurde nach Gleichung (209) gegeben:

$$Q = \int_{T_0}^{T} c_0 \, dT + r;$$

dieser Ausdruck giebt also die Wärmemenge, welche dem Eise von $T_0{}^0$ Temperatur unter dem der Temperatur T entsprechenden Sättigungsdrucke p zugeführt werden muss, um das Eis erst bis T^0 zu erwärmen und dann bei constantem Drucke p in Wasser von T^0 zu verwandeln. c_0 ist dabei die specifische Wärme des Eises bei constantem Drucke, für welche *Person**) den Werth

$$c_0 = 0{,}5040$$

giebt, welcher Werth bis jetzt allerdings nur für den Druck von 1 Atmosphäre gilt; wahrscheinlich ist er aber auch

*) „Compt. rend." T. XXX, p. 526. — „Ann. de chim. et de phys." N. S. III, T. XXI, p. 295. — „*Poggendorff*'s Ann." Bd. 74, S. 409.

nahezu constant für alle Pressungen. Nehmen wir das Letztere an, so folgt

$$Q = 0{,}504\,(T - T_0) + r. \tag{227}$$

Nehmen wir z. B. an, ein Kilogr. Eis von der Temperatur $T_0 = 363^0$ (-10^0 C.) stehe unter atmosphärischem Drucke und soll, während der Druck constant bleibt, in Wasser verwandelt werden, so ist die dem Druck von 1 Atmosphäre entsprechende Sättigungstemperatur $T = 273^0$ (0^0 C.); die von aussen zuzuführende Wärme ist daher, weil für $T = 273$ $r = 79{,}035$ ist

$$Q = 84{,}075 \text{ Calorien.}$$

Die Schmelzung dieses Eises beginnt erst, wenn seine Temperatur von 263^0 auf 273^0 gestiegen ist, dazu war zunächst die erforderliche Wärmemenge:

$$0{,}504\,(T - T_0) = 5{,}040 \text{ Calorien.}$$

Die im Wasser von T^0 im Sättigungszustande, d. h. unter dem dieser Temperatur entsprechenden Drucke p enthaltene Wärmemenge war nach Gleichung (214)

$$J = Q - Apu.$$

Das zweite Glied, welches die beim Schmelzen in äussere Arbeit verwandelte Wärme repräsentirt, lässt sich nur für die Temperatur $T = 273^0$ bestimmen, weil im Uebrigen der Lauf der Spannungscurve nicht bekannt ist, und sonach Gleichung (224) zur Berechnung dieses Gliedes noch nicht benutzt werden kann.

Für die Temperatur $T = 273^0$ war

$$u = -0{,}000087;$$

ferner wegen $p = 10334$ und $A = \frac{1}{424}$ folgt für diese Temperatur

$$Apu = -0{,}00212 \text{ Calorien.}$$

Man erhält daher das merkwürdige Resultat, dass in diesem Falle nicht Wärme in Arbeit verwandelt wird, sondern dass das Umgekehrte der Fall ist.

Während des Schmelzens des Eises bei der Temperatur $T = 273^0$ (0^0 C.) wird sonach die vom Atmosphärendruck

verrichtete Arbeit noch als Wärme vom Eise aufgenommen und wir erhalten für die im Wasser von 0° enthaltene Wärme:

$$J = Q + 0{,}00212,$$

oder wenn wir voraussetzen, dass das Eis Anfangs die Temperatur T_0 hatte, aber während des ganzen Processes unter atmosphärischem Drucke stand:

$$J = 0{,}504\,(273 - T_0) + 79{,}035 + 0{,}00212$$
$$= 206{,}629 - 0{,}504\,T_0.$$

Beträgt, wie im obigen Beispiele, die Anfangstemperatur des Eises $T_0 = 263°$, so folgt:

$$J = 84{,}077,$$

während die von aussen zuzuführende Wärme

$$Q = 84{,}075 \text{ Calorien war.}$$

Die Differenz ist ausserordentlich gering, ja sie liegt sicher noch innerhalb der Beobachtungsfehler, denn der Werth von r für $T = 273°$ ist schon in der zweiten Decimalstelle unsicher und die specifische Wärme c_0 nach *Person* erleidet durch weitere Bestimmung vielleicht auch noch geringe Aenderungen. Wenn man daher nun auch für die Temperatur $T = 273°$, also den Schmelzpunkt unter atmosphärischem Drucke die von Aussen zugeführte Wärme Q und die dann im Wasser enthaltene J gleich gross annehmen kann, so ist doch in anderen Fällen gewiss ein solches Gleichsetzen nicht mehr gestattet, da möglicherweise beim Schmelzen des Eises unter anderem Drucke die in Wärme ausgedrückte äussere Arbeit beträchtlich ausfallen kann, was eintreten wird, wenn bei grossem Drucke p zugleich die Differenz zwischen dem Volumen v der Gewichtseinheit Wasser und w des Eises bei der entsprechenden Temperatur beträchtlich wird. Ob ferner der Werth von Apu unter allen Umständen beim Eis negativ ist, d. h. ob bei den verschiedenen Schmelztemperaturen stets das Volumen des Wassers kleiner, als das des Eises ist, ist ebenfalls eine Frage, die sich jetzt nicht entscheiden lässt.

Die äussere Arbeit, welche 1 Kilogr. Wasser als Wärme

aufnimmt, wenn es unter atmosphärischem Drucke aus dem festen in den flüssigen Zustand übergeht, ist übrigens:

$$pu = 0{,}899 \text{ Meterkilogramm},$$

also, wie schon aus Obigem hervorgeht, sehr gering.

Die innere latente Wärme des Wassers endlich war nach Gleichung (215):

$$\varrho = r - Apu.$$

Auch dieser Werth, der also angiebt, wie viel mehr Wärme im Wasser enthalten ist, als im Eise von gleicher Temperatur, beide unter gleichem Drucke genommen, auch dieser Werth lässt sich jetzt nur für die Temperatur 273° bestimmen und beträgt für diese:

$$\varrho = 79{,}035 + 0{,}002 = 79{,}037.$$

Diese Wärmemenge in Arbeit ausgedrückt, giebt die gesammte Arbeit, welche erforderlich ist, um den innern Zustand der Gewichtseinheit Eis unter der angenommenen Temperatur so zu verändern, dass es in Wasser übergeht.

Die vorstehenden Betrachtungen zeigen, dass der Vorgang beim Schmelzen der Körper genau nach denselben Formeln zu beurtheilen ist, wie das Verdampfen, und wenn daher durch Versuche dieser Vorgang ebenso genau bekannt wäre, so liessen sich auch hier ähnliche Probleme lösen, wie dies in Capitel III geschehen ist. Leider ist mir das nicht gestattet, da die bisher angestellten Versuche zu wenig Anhaltepunkte geben.

Berichtigungen.

Seite 31. Anmerk., 2. Zeile von unten ist zu lesen: Gleichung I statt Gleichung IIIa.

Seite 52. 4. Zeile von unten ist zu lesen: $\varkappa = \frac{c}{c_1} = 1{,}41$ statt $\varkappa = \frac{c_1}{c} = 1{,}41$.

Seite 117. 2. Zeile von unten ist zu lesen: $L = [Mc - (M - m_1)\,\beta]\,(t_1 - t_2)$ statt $L = [Mc - (M - m_1\,\beta]\,(t_1 - t_2)$.

Seite 128. 13. Zeile von unten ist zu lesen: $m_1 u_2 + Mw$ statt $m_1 u_2 + Mu$.

Seite 158. In allen Formeln auf dieser Seite ist zu lesen: $\left(\frac{dm}{dt}\right)$ und $\left(\frac{dm}{dv}\right)$ statt $\frac{dm}{dt}$ und $\frac{dm}{dv}$.

Druck von A. Th. Engelhardt in Leipzig.

1. Tempe- ratur (*Cels.*) *t*	11. A|ere Te|nte mpf- rme *T* *a*— *Apu*	12. Differen- zen	13. Wärmemenge, die bei der Bildung in Arbeit verwandelt wird. $Apu = B \log. \frac{T}{n}$ $B = 30.456$ $n = 100.00$	14. Differen- zen	15. Differen- zen mit den Werthen der Col. 7
0	6.74	4.80	30.59	0.55	+ 0.33
5	1.94	3.92	31.14	0.54	— 0.38
10	8.02	3.94	31.68	0.54	— 0.22
15	4.08	4.15	32.22	0.52	— 0.08
20	9.93	3.85	32.74	0.51	— 0.17
25	6.08	3.98	33.25	0.51	+ 0.03
30	2.10	3.99	33.76	0.50	+ 0.10
35	8.11	4.02	34.26	0.49	+ 0.15
40	4.09	4.01	34.75	0.48	+ 0.16
45	0.08	4.01	35.23	0.48	+ 0.17
50	6.07	4.02	35.71	0.47	+ 0.18
55	2.05	4.03	36.18	0.46	+ 0.17
60	8.02	4.02	36.64	0.45	+ 0.14
65	4.00	4.02	37.09	0.45	+ 0.11
70	9.98	4.01	37.54	0.44	+ 0.08
75	5.97	4.01	37.98	0.43	+ 0.05
80	1.96	4.00	38.41	0.43	+ 0.01
85	7.96	3.99	38.84	0.43	— 0.02
90	3.97	3.96	39.26	0.42	— 0.05
95	0.01	3.98	39.68	0.41	— 0.05
100	6.03	3.98	40.09	0.41	— 0.08
105	2.05	3.94	40.50	0.40	— 0.11
110	8.10	3.95	40.90	0.39	— 0.12
115	4.15	3.95	41.29	0.39	— 0.14
120	0.20	3.93	41.68	0.38	— 0.16
125	6.27	3.93	42.06	0.39	— 0.17
130	2.34	3.91	42.45	0.37	— 0.17
135	8.43	3.91	42.82	0.37	— 0.17
140	4.52	3.90	43.19	0.37	— 0.17
145	0.62	3.91	43.56	0.36	— 0.16
150	6.71	3.87	43.92	0.36	— 0.07
155	2.84	3.89	44.28	0.35	— 0.14
160	8.95	3.88	44.63	0.35	— 0.14
165	5.07	3.86	44.98	0.35	— 0.18
170	1.21	3.86	45.33	0.34	— 0.10
175	7.35	3.85	45.67	0.34	···· 0.08
180	3.50	3.86	46.01	0.33	— 0.05
185	9.64	3.82	46.34	0.34	— 0.04
190	5.82	3.84	46.68	0.32	+ 0.02
195	1.98	3.82	47.00	0.32	+ 0.04
200	8.16		47.32		+ [illegible]

1.	8.	9.	10.
Temperatur	umen v der ichtseinheit Dampf	Dichtigkeit γ des Dampfes	Differenzen
(*Celsius*)	ch *Mariotte* und *Gay-Lussac*		
t	$= 3.4582 \frac{T}{p}$ (Millimetern) ıbikmeter	$\gamma = \frac{1}{v}$ Kilogramm	
0	05.240	0.0049	
5	47.138	0.0068	19
10	06.783	0.0094	26
15	78.430	0.0127	33
20	58.264	0.0171	44
25	43.761	0.0228	57
30	33.214	0.0301	73
35	25.465	0.0393	92
40	19.714	0.0507	114
45	15.404	0.0649	142
50	12.144	0.0823	174
55	9.6562	0.1036	213
60	7.7398	0.1292	256
65	6.2528	0.1599	307
70	5.0892	0.1965	366
75	4.1715	0.2397	432
80	3.4425	0.2905	508
85	2.8592	0.3497	592
90	2.3894	0.4185	688
95	2.0083	0.4979	794
100	1.6973	0.5892	913
105	1.4422	0.6934	1042
110	1.2316	0.8119	1185
115	1.0570	0.9460	1341
120	0.9113	1.0973	1513
125	0.7892	1.2670	1697
130	0.6864	1.4568	1898
135	0.5995	1.6681	2113
140	0.5256	1.9027	2346
145	0.4625	2.1621	2594
150	0.4085	2.4481	2860
155	0.3620	2.7623	3142
160	0.3219	3.1064	3441
165	0.2872	3.4822	3758
170	0.2569	3.8914	4092
175	0.2306	4.3358	4444
180	0.2076	4.8171	4813
185	0.1874	5.3370	5199
190	0.1696	5.8973	5603
195	0.1538	6.4998	6025
200	0.1399	7.1459	6461

1. pannung s Dampfes n Atmosphären p	2. Temperatur (*Celsius*) t	r	10. Volumen v der Gewichtseinheit Dampf $v = u + w$ Cubikmeter	11. Dichtigkeit γ des Dampfes $\gamma = \frac{1}{v}$ Kilogramm	12. Werthe von $\frac{\varrho}{u}$
0.25	65.35		6.0936	0.1641	85.9
0.50	81.71		3.1653	0.3159	161.4
0.75	92.15		2.1588	0.4632	232.8
1.00	100.00		1.6459	0.6075	301.7
1.25	106.35		1.3338	0.7497	368.5
1.50	111.74		1.1234	0.8901	433.9
1.75	116.43		0.9718	1.0290	497.8
2.00	120.60		0.8570	1.1668	560.7
2.25	124.36		0.7672	1.3035	622.5
2.50	127.80		0.6949	1.4390	683.5
2.75	130.97		0.6354	1.5738	743.7
3.00	133.91		0.5856	1.7076	803.1
3.25	136.66		0.5432	1.8409	861.9
3.50	139.24		0.5067	1.9735	920.1
3.75	141.68		0.4749	2.1057	977.6
4.00	144.00		0.4471	2.2366	1034.6
4.25	146.19		0.4224	2.3674	1091.2
4.50	148.29		0.4004	2.4975	1147.2
4.75	150.29		0.3806	2.6274	1202.8
5.00	152.22		0.3627	2.7571	1258.1
5.25	154.06		0.3465	2.8860	1312.7
5.50	155.84		0.3318	3.0139	1367.1
5.75	157.56		0.3183	3.1417	1421.0
6.00	159.22		0.3058	3.2701	1474.9
6.25	160.82		0.2944	3.3967	1527.9
6.50	162.38		0.2838	3.5236	1580.7
6.75	163.88		0.2740	3.6496	1633.4
7.00	165.35		0.2648	3.7765	1685.7
7.25	166.77		0.2563	3.9017	1737.7
7.50	168.15		0.2483	4.0274	1789.3
7.75	169.50		0.2408	4.1528	1840.8
8.00	170.81		0.2338	4.2771	1891.7
8.25	172.09		0.2271	4.4034	1942.9
8.50	173.34		0.2209	4.5269	1993.5
8.75	174.57		0.2150	4.6512	2043.8
9.00	175.77		0.2094	4.7756	2094.5
9.25	176.94		0.2042	4.8972	2143.9
9.50	178.09		0.1991	5.0226	2193.5
9.75	179.21		0.1944	5.1440	2243.0
10.00	180.31		0.1899	5.2659	2291.7



